

- 0 - (PRE)CORSO DI MATEMATICA
ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio 0.1) Trovare che, per ogni angolo α , si ha

0.1.a) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ (per 0.1.g e 0.1.d),
 0.1.b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ vedi anche testo
 0.1.c) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ adottato del "PRECORSO",
 0.1.d) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ [C'PARTE] pag. 30

1° modo: Applicando le formule di addizione e sottrazione del seno e coseno, si ha

a) $\sin(\pi + \alpha) = \underbrace{\sin \pi}_{=0} \cos \alpha + \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \sin \alpha = -\sin \alpha$

b) $\cos(\pi + \alpha) = \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cos \alpha - \underbrace{\sin \pi}_{=0} \sin \alpha = -\cos \alpha$

c) $\sin(\pi - \alpha) = \underbrace{\sin \pi}_{=0} \cos \alpha - \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \sin \alpha = \sin \alpha$

d) $\cos(\pi - \alpha) = \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cos \alpha + \underbrace{\sin \pi}_{=0} \sin \alpha = -\cos \alpha$, come si voleva dimostrare.

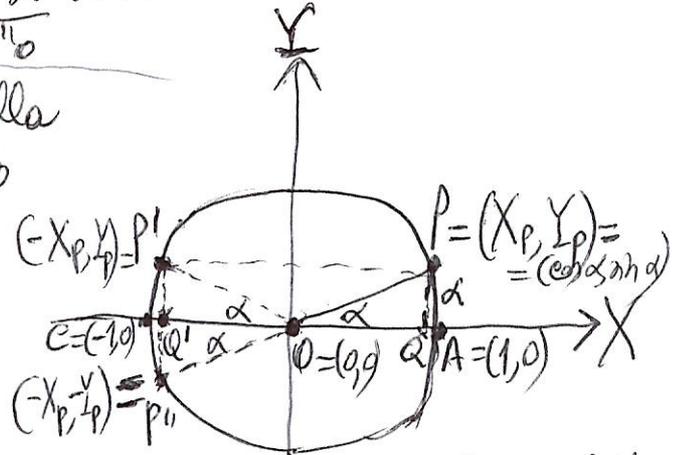
2° modo: Se l'angolo \widehat{AOP} misura α , sulla circonferenza goniometrica, allora l'angolo

$\widehat{AOP'}$ misura $\pi - \alpha$. Di conseguenza, l'angolo $\widehat{COP'}$ misura α . Allora i triangoli OQP e $OQ'P'$ hanno due angoli uguali (quello che misura

α e l'angolo retto rispettivamente in Q e in Q') e, per differenza, hanno tutti e 3 gli angoli uguali (la somma degli angoli interni di ogni triangolo è sempre π). Inoltre i lati OP e OP' sono uguali (sono due raggi). Quindi, per i criteri di congruenza, i due triangoli OQP e $OQ'P'$ sono congruenti, e pertanto $Q'P' = QP$

cioè, rispettivamente, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Inoltre, OQ e OQ' hanno la stessa lunghezza, ma verso opposto (il primo segmento è "orientato verso destra", l'altro, "verso sinistra", quindi $\cos(\pi - \alpha) = OQ' = -OQ = -\cos \alpha$. Inoltre notiamo che l'angolo

$\widehat{AOP''}$ (quello che "passa" per i punti P e P') misura $\pi + \alpha$, e quindi l'angolo $\widehat{COP''}$ misura α . Analogamente come nel caso precedente, si ha che i triangoli OQP e $OQ''P''$ sono congruenti, e si ha: $\sin(\pi + \alpha) = Q''P'' = -QP = -\sin \alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = OQ'' = -OQ = -\cos \alpha$.



PRECORSO DI MATEMATICA -1- ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE
1.1 Esercizio: Determinare l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (1, 2)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = -3x + 2$.

Sia $y = mx + q$ l'equazione della retta s . Notiamo che $m = \frac{1}{3}$, perché il coefficiente angolare della retta r è -3 e m dev'essere contemporaneamente RECIPROCO e OPPOSTO rispetto a -3 , quindi $m = \frac{1}{3}$. [Naturalmente, questo ci dice anche che la retta s è OBLIQUA]. Quindi possiamo scrivere che l'equazione della retta s è $y = \frac{1}{3}x + q$, ove q viene determinato imponendo il passaggio per il punto $P_0 = (1, 2)$. Ciò vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 2, l'equazione $y = \frac{1}{3}x + q$ deve diventare un'identità. Quindi si deve avere

$$2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + q, \text{ da cui } q = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Pertanto l'equazione della retta s è $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

1.2. Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s parallela alla retta $r: y = -\frac{1}{2}x - 9$ e passante per il punto $Q_0 = (2, 0)$.
Sia $y = mx + q$ l'equazione della retta s . Essendo parallela alla retta $y = -\frac{1}{2}x - 9$, si ha che $m = -\frac{1}{2}$, in quanto due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare (o sono entrambe verticali, per essere precisi). Ora, scrivendo l'equazione della retta s come $(*) y = -\frac{1}{2}x + q$, determiniamo q imponendo il passaggio per il punto $Q_0 = (2, 0)$. Quindi la relazione $(*)$ dev'essere verificata se al posto di x ci mettiamo 2 e se al posto di y ci mettiamo 0. Otteniamo $0 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q$, da cui $q = 1$.
Pertanto l'equazione della retta s è $y = -\frac{1}{2}x + 1$

PRECORSO DI MATEMATICA - 2 - ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE
1.3 Esercizio / domanda: A quanto è uguale il coefficiente angolare di una retta orizzontale?

Risposta $m=0$

Perché? Perché una retta orizzontale è del tipo $y=k$, ovvero $y=q$, con k (o q) reale (qualsiasi).

Allora, nell'equazione generale della retta, si deve avere $mx+q=q$. Ma q è una costante: quindi, per scriverla come polinomio di primo grado in x , dobbiamo scrivere $q=0 \cdot x+q$, quindi si deve avere $mx+q=0 \cdot x+q$. Per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti nella x devono essere uguali, e quindi si ha $m=0$.

[N.B.: una retta verticale è del tipo $x=x_0$, e quindi il ~~no~~ coefficiente angolare non esiste]

Es. 1.4. Determinare l'equazione della retta ~~s~~ perpendicolare alla retta ^(r) $y=2x$ e passante per il punto $Q_0=(2,0)$.

Sia $y=mx+q$ l'equazione della retta ~~s~~. Siccome r ed s sono perpendicolari, i rispettivi coefficienti angolari di r e di s devono essere contemporaneamente RECIPROCI e OPPOSTI. Pertanto $m=-\frac{1}{2}$, perché $-\frac{1}{2}$ è il "reciproco e opposto" di 2 . Ora, procedendo come nell'esercizio 1.2, si

ottiene $q=1$ (imponendo il passaggio per il punto $Q_0=(2,0)$).
L'equazione della retta s è $y=-\frac{1}{2}x+1$.

Esercizio 1.5. Determinare l'equazione della retta s parallela alla retta r di equazione $y=\frac{1}{3}x-19$ e passante per il punto $P_0=(1,2)$.

Sia $y=mx+q$ l'equazione della retta s . Siccome due rette (non verticali) sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, allora si ha che $m=\frac{1}{3}$. Imponendo il passaggio per il punto $P_0=(1,2)$ e procedendo come nell'esercizio 1.1, si trova $q=\frac{5}{3}$. Dunque, l'equazione della retta s è: $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

~~2~~
ESERCIZIARIO DI MATEMATICA DI ISPIRAZIONE

Esercizio) Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.6 $A = (-1, 10)$, $B = (3, 6)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx + q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Impone il passaggio per il punto $A = (-1, 10)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo 10 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $10 = -m + q$, da cui $q = 10 + m$.

Inoltre, impone il passaggio per il punto $B = (3, 6)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $6 = 3m + q$. Ma sappiamo che $q = 10 + m$, quindi sostituendo $10 + m$ qui al posto di q si ha $6 = 3m + 10 + m$, cioè $6 - 10 = 3m + m$, ossia $-4 = 4m$.

Dividendo ambo i membri per 4 , si ottiene $-1 = m$. Quindi $m = -1$

Ora, tenendo conto che $q = 10 + m$, si ha $q = 10 - 1 = 9$. Pertanto

l'equazione della retta s è $y = -x + 9$.

17. Allo stesso risultato si giunge se si considera la formula

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \text{ ove } x_0 = -1, y_0 = 10, x_1 = 3, y_1 = 6, \text{ ottenendo}$$

$$\frac{y - 10}{6 - 10} = \frac{x + 1}{3 + 1}, \text{ cioè } \frac{y - 10}{-4} = \frac{x + 1}{4}, \text{ da cui } y - 10 = -(x + 1) =$$

$$= -x - 1, \text{ e quindi } y = -x - 1 + 10 = -x + 9. \text{ Si ottiene sempre l'equazione}$$

$$y = -x + 9$$

EQUAZIONE DEL FASCIO DI RETTE PASSANTI PER UN PUNTO (x_0, y_0) (PER UN PUNTO PASSANO INFINITE RETTE)

Oreliminarmente, vediamo che cosa vuol dire il passaggio per un punto e come si impone una condizione di questo tipo nell'equazione di una retta (non verticale) $y = mx + q$

eserc. 18.

Esempio: la retta $y = 2x + 1$ passa per il punto $(1, 3)$?
Come si risponde a domande di questo tipo? Nell'equazione $y = 2x + 1$, al posto di x si mette 1, al posto di y si mette 3 (perché la coordinata x , cioè l'ascissa, del punto $(1, 3)$ è 1, mentre la coordinata y , cioè l'ordinata, del punto $(1, 3)$ è 3): se si ottiene un'uguaglianza sempre vera, allora la nostra retta passa per il nostro punto; se si ottiene un'espressione sempre falsa, allora la retta non passa per quel punto.

Da $y = 2x + 1$, sostituendo x con 1 ed y con 3 si ottiene $3 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$, che è sempre vero. Pertanto la retta di equazione $y = 2x + 1$ passa per il punto $(1, 3)$.
Facciamo vedere che questa retta non passa per $(2, 6)$.

Se ~~da~~ $y = 2x + 1$ sostituiamo x con 2 ed y con 6, si ha $6 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, che è ovviamente falso. Quindi la retta $y = 2x + 1$ non passa per il punto $(2, 6)$.

Ora fissiamo un generico punto (x_0, y_0) e determiniamo il fascio di tutte le rette passanti per (x_0, y_0) (tranne quella VERTICALE). L'equazione generica di una retta (non verticale) è $y = mx + q$. Se al posto di x ci mettiamo x_0 e sostituiamo y con y_0 , si ottiene $y_0 = mx_0 + q$ (perché si deve avere una uguaglianza sempre vera, come detto sopra), con gli stessi m e q .

Da $y = mx + q$ si ottiene $y - mx = q$, mentre da $y_0 = mx_0 + q$ si ricava $y_0 - mx_0 = q$. Ma, come abbiamo detto alla fine della pagina precedente, q è lo stesso, e pertanto $y - mx = y_0 - mx_0$. Sottraendo y_0 ad entrambi i membri, si ha

$$\boxed{y - mx - y_0} = y_0 - mx_0 - y_0 = \boxed{-mx_0}$$

Aggiungendo mx al primo e all'ultimo termine, otteniamo $y - mx - y_0 + mx = mx - mx_0 = m(x - x_0)$, cioè

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

che è l'equazione del fascio di rette passanti per il punto (x_0, y_0) (escludendo la retta verticale).

1.9) Esempio/esercizio: Scrivere l'equazione della retta r passante per il punto $P_0 = (6, 20)$ e perpendicolare alla retta $y = -\frac{1}{3}x - 11$.

Innanzitutto, osserviamo che il coefficiente angolare m della retta r dev'essere reciproco e opposto rispetto a $-\frac{1}{3}$, e quindi sarà uguale a 3. Quindi $\boxed{m = 3}$. E' come la retta r passa per $(6, 20)$, allora l'espressione

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (\text{cioè l'equazione del fascio di rette passanti per } (x_0, y_0))$$

dev'essere soddisfatta se al posto di y_0 ci mettiamo 20 (e x al posto di m ci mettiamo 3). Dunque, si ottiene

$$y - 20 = 3(x - 6), \text{ cioè } y - 20 = 3x - 18, \text{ ossia, sommando } 20 \text{ in entrambi i membri, } y = y - 20 + 20 = 3x - 18 + 20 = 3x + 2. \text{ Quindi } \boxed{y = 3x + 2} \text{ è l'equazione della retta } r.$$

Ora, notiamo che, ⁻⁶⁻ mentre per un punto passano infinite rette, si ha che

PER DUE PUNTI DISTINTI PASSA UNA E UNA SOLA RETTA.

1.1) Esempio/esercizio: Scrivere l'equazione della retta r passante per i punti $P_1 = (1, 11)$ e $P_2 = (2, 15)$

Innanzi tutto, i due punti P_1 e P_2 non hanno la stessa ascissa (se $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, si ha: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$) e pertanto la retta r non è verticale. (Tra l'altro, i due punti P_1 e P_2 non hanno la stessa ordinata, in quanto $y_1 = 11$, $y_2 = 15$, e quindi la retta r non è orizzontale). Quindi, la nostra retta r è obliqua. Comunque ci basta che r non sia verticale per poter scrivere l'equazione della retta r nella forma

$$(*) \quad y = mx + q$$

Adesso dobbiamo determinare m e q in modo tale che la nostra retta r passi per i punti P_1 e P_2 . Il passaggio per il punto P_1 sta a indicare che, se al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 11, la condizione

(*) dev'essere verificata. Si deve avere quindi: $11 = 1 \cdot m + q$, cioè $\boxed{m + q = 11}$. Imponiamo ora il passaggio per il punto P_2 :

ciò vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 2 e se al posto di y ci mettiamo 15, allora la condizione (*) dev'essere soddisfatta, ottenendo $15 = 2m + q$. Quindi si ottengono le seguenti due equazioni, dove le incognite sono m e q :

- 7 -

$$\begin{cases} m + q = 11 \\ 2m + q = 15 \end{cases}$$

Dalla prima di queste due equazioni si ottiene $q = 11 - m$.

Sostituendo q con $11 - m$ nella seconda equazione, si ha $2m + 11 - m = 15$, cioè $m + 11 = 15$, da cui

$$m = 15 - 11 = 4. \text{ Siccome } q = 11 - m, \text{ allora } q = 11 - 4 = 7.$$

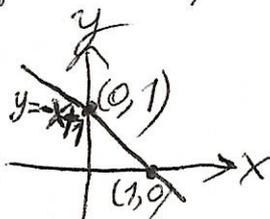
Quindi l'equazione della retta L è

$$y = 4x + 7.$$

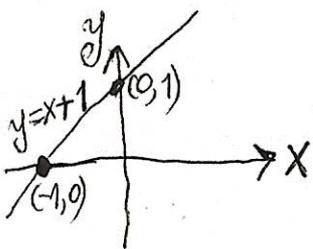
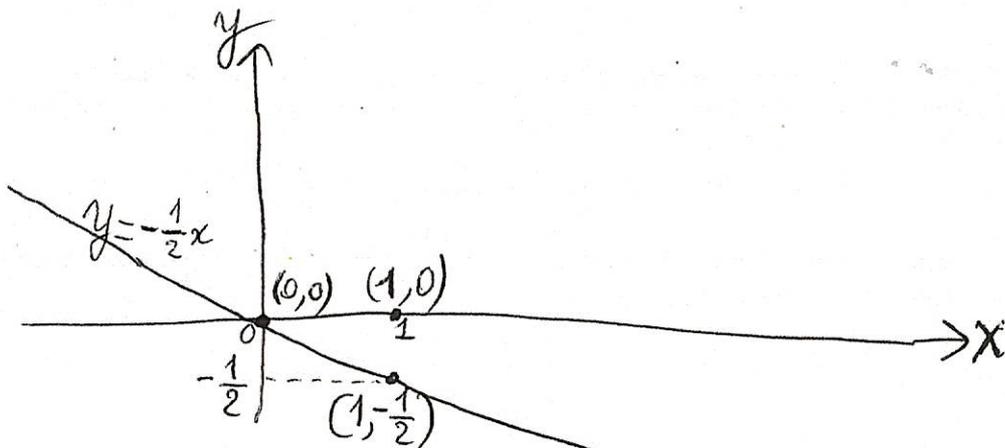
1.11) Ora, vediamo un altro tipo di esercizio: "Disegnare" la retta di equazione $y = mx + q$. Siccome per due punti distinti passa UNA E UNA SOLA RETTA, allora sarà sufficiente determinare due punti di questa retta. Per fare le cose in modo semplice, conviene vedere che cosa succede per $x = 0$ (quindi determinare l'intersezione della retta con l'asse delle y) e per $y = 0$ (cioè determinare l'intersezione della retta con l'asse delle x).

Abbiamo visto che, da $y = mx + q$, per $x = 0$ si ha $y = q$ (quindi la retta passa per il punto $(0, q)$) e per $y = 0$ si ha $mx + q = 0$, cioè $mx = -q$, da cui $x = -\frac{q}{m}$ (pertanto la retta passa per il punto $(-\frac{q}{m}, 0)$). Quindi i punti $(0, q)$ e $(-\frac{q}{m}, 0)$ "determinano" la nostra retta.

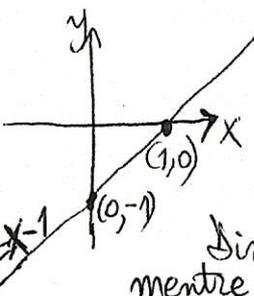
Facciamo un esempio: "disegniamo" la retta $y = -x + 1$. Per $x = 0$ si ha $y = 1$ (quindi la retta passa per il punto $(0, 1)$), mentre per $y = 0$ si ha $0 = -x + 1$, cioè, aggiungendo x in entrambi i membri, $x = x - x + 1$, ossia $x = 1$ (quindi la retta passa per il punto $(1, 0)$). Quindi disegneremo i punti $(0, 1)$, $(1, 0)$ e la retta congiungente questi due punti sarà la retta data.



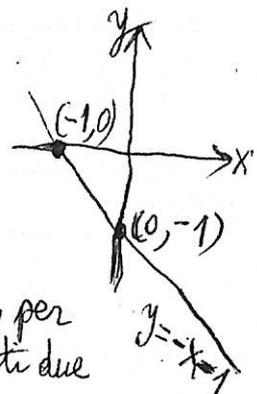
1.12) Se invece vogliamo disegnare la retta $y = -\frac{1}{2}x$ (oppure una qualsiasi retta obliqua passante per l'origine), allora notiamo che per $x=0$ si ha $y=0$ (come sappiamo, la nostra retta passa per il punto $(0,0)$). Siccome non possiamo scegliere $y=0$, allora prenderemo, per esempio, $x=1$, e in corrispondenza troveremo il punto $y = -\frac{1}{2}$. Dunque, la retta passa per il punto $(1, -\frac{1}{2})$ e allora disegneremo la retta congiungente i punti $(0,0)$ ed $(1, -\frac{1}{2})$, tenendo conto che per due punti distinti passa UNA e UNA SOLA RETTA.



Disegniamo ora la retta $y = x + 1$. Per $x=0$ si ha $y=1$ (quindi la retta passa per il punto $(0,1)$), mentre per $y=0$ è $0 = x + 1$, quindi $x = -1$ (pertanto la retta passa per $(-1,0)$). Quindi disegniamo i punti $(-1,0)$, $(0,1)$ e la retta congiungente questi punti. Sarà la retta data $(y = x + 1)$.



Disegniamo la retta $y = x - 1$. Per $x=0$, è $y = -1$, mentre per $y=0$ è $x=1$: quindi la retta passa per i punti $(0,-1)$ e $(1,0)$: la retta congiungente questi due punti sarà la retta di equazione $y = x - 1$.



Disegniamo infine la retta $y = -x - 1$. Per $x=0$, è $y = -1$, mentre per $y=0$ è $0 = -x - 1$, quindi $x = -1$. La retta passa per i punti $(0,-1)$ e $(-1,0)$, e pertanto la retta congiungente questi due punti sarà la retta di equazione $y = -x - 1$.

-9

ATTENZIONE!!!

N.B.: "Disegnare", le quattro rette

$$y = x + 1, \quad y = -x + 1, \quad y = x - 1, \quad y = -x - 1$$

è IMPORTANTISSIMO nello studio delle equazioni e disequazioni trigonometriche, perché permette di visualizzare, le equazioni e disequazioni ~~con~~ l'aiuto della circonferenza goniometrica !!!

1.13) Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $O=(0,0)$ e $B=(3,-2)$.

Notiamo che l'equazione del fascio di rette passanti per l'origine (tranne quella verticale) è data da $y=mx$, come l'intuizione suggerisce.

Infatti, se una retta del tipo $y=mx+q$ passa per l'origine $(0,0)$, allora nell'espressione $y=mx+q$, se al posto di x ci mettiamo 0 e al posto di y ci mettiamo 0 , allora si ha: $0=0 \cdot m + q = q$, quindi $\boxed{q=0}$. Quindi, in tutte le rette passanti per l'origine (tranne quella verticale) si ha $q=0$: quindi l'equazione del fascio di rette passanti per l'origine si riduce a $\boxed{y=mx}$. Tra l'altro, l'espressione $y=mx$ si può ricavare dall'equazione del fascio di rette passanti per un punto generico (x_0, y_0) del piano cartesiano (esclusa, naturalmente, quella verticale)

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, considerando il punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (cioè sostituendo qui x_0 con 0 ed y_0 con 0).

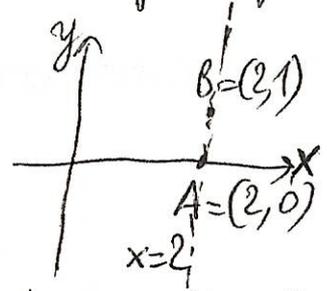
Detto questo, ora, per determinare m , imponiamo il passaggio per il punto $B=(3, -2)$, usando direttamente l'espressione $y=mx$. Per determinare m , sostituiamo x con 3 ed y con -2 (perché per questi valori di x ed y , l'espressione $y=mx$ diventa un'uguaglianza vera). Si ottiene allora $-2=3m$, cioè $-\frac{2}{3}=m$. Pertanto $\boxed{m=-\frac{2}{3}}$, e allora l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x}$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti

1.14 $A = (2, 0), B = (2, 1)$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ascissa ($x=2$), pertanto la retta s è una retta verticale di equazione



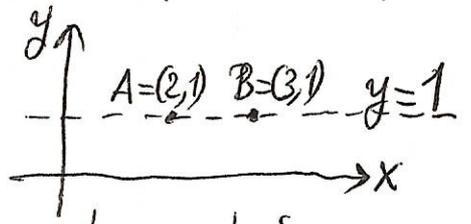
$x = x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, 2). Allora l'equazione della retta s è

$x = 2$.

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i

(1.15) punti $A = (2, 1), B = (3, 1)$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y=1$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione



$y = k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, 1).

Quindi l'equazione della retta s è

$y = 1$.

1.16 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A = (\frac{1}{9}, -1)$, $B = (\frac{1}{9}, \frac{6}{5})$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x = \frac{1}{9}$), e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x = x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{1}{9}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x = \frac{1}{9}}.$$

1.17 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A = (0, \frac{4}{3})$, $B = (\frac{1}{9}, \frac{4}{3})$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y = \frac{4}{3}$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y = k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{4}{3}$). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = \frac{4}{3}}.$$

1.18 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A = (-\frac{1}{3}, 6)$, $B = (-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3})$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x = -\frac{1}{3}$), e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x = x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $-\frac{1}{3}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x = -\frac{1}{3}}.$$

1.19 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A = (2, \frac{1}{5})$, $B = (-3, \frac{1}{5})$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y = \frac{1}{5}$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y = k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{1}{5}$). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = \frac{1}{5}}.$$

1.20 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A = (\frac{13}{2}, -5)$, $B = (\frac{13}{2}, 0)$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x = \frac{13}{2}$), e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x = x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{13}{2}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x = \frac{13}{2}}.$$

1.21 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A = (1, -4)$, $B = (\frac{5}{7}, -4)$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y = -4$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y = k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, -4). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = -4}.$$

-15-

1.22 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A=(3,4)$, $B=(3,6)$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x=3$), e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x=x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, 3). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x=3}.$$

1.23 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A=(1,5)$, $B=(-2,5)$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y=5$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y=k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, 5). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=5}.$$

1.24 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A = (\frac{1}{2}, 3)$, $B = (\frac{1}{2}, 5)$.

Notiamo che i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x = \frac{1}{2}$), e pertanto la retta s è una retta verticale di equazione $x = x_0$, ove x_0 è l'ascissa comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{1}{2}$). Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}.$$

1.25 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
 $A = (1, \frac{2}{5})$, $B = (-4, \frac{2}{5})$.

Notiamo che A e B hanno la stessa ordinata ($y = \frac{2}{5}$), e pertanto la retta s è una retta orizzontale di equazione $y = k$, ove k è l'ordinata comune dei due punti dati (cioè, nel nostro caso, $\frac{2}{5}$). Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = \frac{2}{5}}.$$

Esercizio
1.26

Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A = (-2, -3)$, $B = (1, 2)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx + q$.

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Imporre il passaggio per il punto $A = (-2, -3)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -2 e al posto di y ci mettiamo -3 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $-3 = -2m + q$.

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B = (1, 2)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 2 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $2 = m + q$. Quindi

$$\begin{cases} -2m + q = -3 \\ m + q = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Sostituendo } \boxed{q = 2 - m} \text{ nella 1}^{\text{a}} \text{ equazione, si ha}$$

$$\begin{aligned} -2m + 2 - m &= -3, \text{ cioè} \\ -2m - m &= -3 - 2, \text{ ossia } -3m = -5, \\ \text{cioè } 3m &= 5, \text{ da cui } \boxed{m = \frac{5}{3}}. \end{aligned}$$

(sistema lineare di 1° grado con incognite m e q)

all'espressione $q = 2 - m$, sostituendo m con $\frac{5}{3}$ si ottiene $\boxed{q = 2 - \frac{5}{3} = \frac{6}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}}$. Essendo $\boxed{m = \frac{5}{3}}$, $\boxed{q = \frac{1}{3}}$, l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}}$$

Esercizio 1.27 Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A = (-1, 10)$, $B = (3, 6)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx + q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Impone il passaggio per il punto $A = (-1, 10)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo 10 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $10 = -m + q$, da cui $q = 10 + m$.

Inoltre, impone il passaggio per il punto $B = (3, 6)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $6 = 3m + q$. Ma sappiamo che $q = 10 + m$, quindi sostituendo $10 + m$ qui al posto di q , si ha $6 = 3m + 10 + m$, cioè $6 - 10 = 3m + m$, ossia $-4 = 4m$.

Dividendo ambo i membri per 4 , si ottiene $-1 = m$. Quindi $m = -1$

Ora, tenendo conto che $q = 10 + m$, si ha $q = 10 - 1 = 9$. Pertanto

l'equazione della retta s è $y = -x + 9$.

1.8 ⁻¹⁹ ~~Esercizio~~: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $A=(1, -5)$, $B=(4, 0)$.

Osserviamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, la cui equazione è del tipo $y=mx+q$.

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Imporre il passaggio per il punto $A=(1, -5)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo $(B=(4, 0))$

1 e al posto di y ci mettiamo -5 , allora l'uguaglianza
(4) (0)
 $y=mx+q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere

$$\begin{aligned} -5 &= m+q \\ 0 &= 4m+q \end{aligned}$$

Siamo davanti a un sistema lineare del 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite (che sono m e q). Poiché $0=4m+q$, allora $q=-4m$.

Se nell'equazione $-5=m+q$ sostituiamo q con $-4m$, otteniamo $-5=m-4m$, cioè $-5=-3m$, da cui $3m=5$, e pertanto $m=\frac{5}{3}$. Inoltre, siccome $q=-4m$, si ha

$$q=(-4) \cdot \frac{5}{3} = -\frac{20}{3}. \text{ Pertanto l'equazione della retta } s \text{ è}$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3}.$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.29) $A = (5, -5)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx + q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Imporre il passaggio per il punto $A = (5, -5)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 5 e al posto di y ci mettiamo -5 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $-5 = 5m + q$.

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo $-\frac{1}{2}$ e al posto di y ci mettiamo $\frac{1}{2}$, allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}m + q$. Si ottiene quindi il seguente sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite, le cui incognite sono m e q :

$$\begin{cases} 5m + q = -5 \\ -\frac{1}{2}m + q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dalla 1^a delle 2 equazioni, si ricava $q = -5 - 5m$. Sostituendo, nella 2^a equazione, q con questa espressione, si ha: $-\frac{1}{2}m - 5 + 5m = \frac{1}{2}$, cioè $-5m - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} + 5$, vale a dire $(-5 - \frac{1}{2})m = \frac{1}{2} + 5$, cioè $(-\frac{10}{2} - \frac{1}{2})m = \frac{1}{2} + \frac{10}{2}$, ossia $-\frac{11}{2}m = \frac{11}{2}$. Moltiplicando per $-\frac{2}{11}$ si ha $(-\frac{2}{11}) \cdot (-\frac{11}{2})m = (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{11}{2}$, cioè $m = -1$. Poiché $q = -5 - 5m$, allora $q = -5 - 5(-1) = -5 + 5 = 0$, $q = 0$. L'equazione della retta s è

$$y = -x$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.30 $A=(5,2)$, $B=(-3,1)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx + q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Imporre il passaggio per il punto $A=(5,2)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 5 e al posto di y ci mettiamo 2 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $2 = 5m + q$.

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B=(-3,1)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -3 e al posto di y ci mettiamo 1 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $1 = -3m + q$

$\begin{cases} 5m + q = 2 \\ -3m + q = 1 \end{cases}$ (sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e a 2 incognite; le incognite sono m e q). Dalla 1ª delle 2 equa

zioni si ha $q = 2 - 5m$. Sostituendo questa espressione nella 2ª equazione, e
 $-3m + 2 - 5m = 1$, cioè $-3m - 5m = 1 - 2$, ossia $-8m = -1$, vale
a dire $8m = 1$, quindi $m = \frac{1}{8}$. Tornando all'espressione $q = 2 - 5m$
e sostituendo m con $\frac{1}{8}$, otteniamo $q = 2 - \frac{5}{8} = \frac{16}{8} - \frac{5}{8} = \frac{16-5}{8} = \frac{11}{8}$.

Dunque, $m = \frac{1}{8}$, $q = \frac{11}{8}$, e pertanto l'equazione
della retta s è

$$y = \frac{1}{8}x + \frac{11}{8}$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.31 $A = (5, -4)$, $B = (-1, -1)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx + q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Imporre il passaggio per il punto $A = (5, -4)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 5 e al posto di y ci mettiamo -4 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $-4 = 5m + q$

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B = (-1, -1)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo -1 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $-1 = -m + q$

Obteniamo dunque un sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite. Dalla 2ª equazione si ha $q = -1 + m$; sostituendo q

con $-1 + m$ nella 1ª equazione, si ha $5m - 1 + m = -4$, da cui $5m + m = -4 + 1$, cioè $6m = -3$, da cui $m = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$.

Tornando all'espressione $q = -1 + m$, si ottiene $q = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2-1}{2} = -\frac{3}{2}$ (N.B.: $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{2} = -\frac{2}{2}$; $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$). Quindi

$m = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{3}{2}$, e l'equazione della retta s è

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti
1.32 $A = (-1, 3)$, $B = (2, 0)$.

Notiamo che i punti A e B non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y , e pertanto la retta s sarà una retta obliqua, che possiamo scrivere nella forma $y = mx + q$

Adesso determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti A e B . Imporre il passaggio per il punto $A = (-1, 3)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo 3 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $\boxed{3 = -m + q}$

Inoltre, imporre il passaggio per il punto $B = (2, 0)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 2 e al posto di y ci mettiamo 0 , allora l'uguaglianza $y = mx + q$ dev'essere verificata, ossia si deve avere $\boxed{0 = 2m + q}$

$\begin{cases} -m + q = 3 \\ 2m + q = 0 \end{cases}$ Si tratta di un sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite. Dalla 2ª equazione otteniamo $\boxed{q = -2m}$; sostituendo q con $-2m$ nella 1ª equazione, si ha $-m - 2m = 3$, cioè $-3m = 3$, $3m = -3$, $m = -\frac{3}{3} = -1$.

Dalla relazione $q = -2m$ si ottiene $q = (-2) \cdot (-1) = 2$. Quindi $\boxed{m = -1}$, $\boxed{q = 2}$, e pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = -x + 2}$$

1.33 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (3, 4)$ e parallela alla retta r di equazione $y = -4x - 7$

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r , che è obliqua; quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è -4 . Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (3, 4)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = -4$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, ottenendo

$$y - 4 = -4 \cdot (x - 3), \text{ cioè}$$

$$y - 4 = -4x + 12, \text{ ossia } y = -4x + 12 + 4, \text{ cioè}$$

$$\boxed{y = -4x + 16},$$

che è l'equazione della retta s .

1.34 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (1, 5)$ e parallela alla retta r la cui equazione è $y = \frac{1}{3}x + 19$.

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r , che è obliqua; quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è $\frac{1}{3}$. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (1, 5)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = \frac{1}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 5$, ottenendo

$$(y - 5) = \frac{1}{3} (x - 1) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right), \text{ da cui}$$

$$\boxed{y} = \frac{1}{3}x + 5 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{15}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$$

Pertanto l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}}$$

1.35 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (-\frac{3}{2}, 7)$ e parallela alla retta r di equazione $y = -2x + 1$.

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r , che è obliqua: quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è -2 . Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (-\frac{3}{2}, 7)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = -2$, $x_0 = -\frac{3}{2}$, $y_0 = 7$, ottenendo

$$y - 7 = -2(x + \frac{3}{2}), \text{ cioè } y - 7 = -2x - 3, \text{ ossia } y = -2x - 3 + 7, \text{ cioè } y = -2x + 4$$

Pertanto l'equazione della retta s è: $\boxed{y = -2x + 4}$.

1.36 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (5, 16)$ e parallela alla retta r di equazione $y = 3x + 10$

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia parallela alla retta r , che è obliqua; quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono parallele se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono uguali, allora il coefficiente angolare della retta s è 3 . Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (5, 16)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = 3$, $x_0 = 5$, $y_0 = 16$, ottenendo

$$y - 16 = 3 \cdot (x - 5), \text{ cioè}$$

$$y - 16 = 3x - 15, \text{ da cui}$$

$$y = 3x - 15 + 16, \text{ ossia } \boxed{y = 3x + 1},$$

che è l'equazione della retta s .

1.37 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (2, 1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = -\frac{7}{4}x + \frac{8}{11}$

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r , che è obliqua; quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è $\frac{4}{7}$. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (2, 1)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = \frac{4}{7}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, ottenendo

$$y - 1 = \frac{4}{7} (x - 2) = \frac{4}{7}x - \frac{8}{7} \quad \text{Pertanto si ha:}$$

$$y = \frac{4}{7}x - \frac{8}{7} + 1 = \frac{4}{7}x - \frac{8}{7} + \frac{7}{7} = \frac{4}{7}x - \frac{1}{7}$$

Quindi

$$\boxed{y = \frac{4}{7}x - \frac{1}{7}}$$

è l'equazione della retta s .

1.38 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (7, 2)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = x - \frac{1}{3}$.

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r , che è obliqua; quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*). Si noti che la retta r ha coefficiente angolare 1.

Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è -1 . Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (7, 2)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = -1$, $x_0 = 7$, $y_0 = 2$, ottenendo

$$y - 2 = -1 \cdot (x - 7) = -x + 7, \text{ da cui } y = -x + 7 + 2, \text{ cioè}$$

$$\boxed{y = -x + 9},$$

che è l'equazione della retta s .

1.39) Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (-1, 5)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad \boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r , che è obliqua; quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è 2 . Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (-1, 5)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = 2$, $x_0 = -1$, $y_0 = 5$, ottenendo

$$y - 5 = 2 \cdot (x + 1) = 2x + 2, \text{ da cui}$$

$$y = 2x + 2 + 5, \text{ ossia } \boxed{y = 2x + 7},$$

che è l'equazione della retta s .

-31-

1.10 Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_0 = (1, 5)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = -3x + 6$.

Svolgimento. L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

$$(*) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

dove m indica il coefficiente angolare.

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta s sia perpendicolare alla retta r , che è obliqua; quindi s sarà una retta obliqua, e quindi non verticale. Pertanto si può applicare la formula (*).

Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta s è $\frac{1}{3}$. Poiché s deve passare per il punto $P_0 = (1, 5)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = \frac{1}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 5$, ottenendo

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 1), \text{ cioè } y - 5 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, \text{ da cui}$$
$$\boxed{y} = \frac{1}{3}x + 5 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{15}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}}.$$

Quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}}.$$

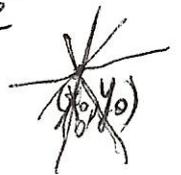
-32-

ESERCIZI

1.41) Scrivere l'equazione della retta s che passa per il punto $P_0 = (1, 3)$ ed è parallela alla retta di equazione $y = 2x - 3$.

Risoluzione: L'equazione del fascio di rette passanti per un punto (x_0, y_0) (che include tutte le rette passanti per (x_0, y_0) tranne quella verticale) è

(*) $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ dove m indica il coefficiente angolare.



Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che la retta sia parallela alla retta $y = 2x - 3$, che è una retta obliqua, in particolare non verticale quindi veramente possiamo applicare la formula (*) (si deve sempre verificare di non essere nella situazione "cattiva" della retta verticale).

Siccome due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, allora il coefficiente angolare della retta s è 2. Tenendo conto che s deve passare per il punto $P_0 = (1, 3)$, allora nella formula (*) prenderemo $m = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, ottenendo

$$y - 3 = 2 \cdot (x - 1) \quad \text{cioè}$$
$$y - 3 = 2x - 2 \quad \text{ma } y = 2x - 2 + 3 \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{y = 2x + 1}$$

che sarà l'equazione della retta s .

- 33 -

1,42) Esercizio: Determinare l'equazione della retta s passante per il punto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$ e perpendicolare alla retta di equazione $y=0$.

Notiamo che la retta $y=0$ è l'asse delle x , che è orizzontale. Quindi una retta s perpendicolare alla retta $y=0$ è necessariamente verticale. Pertanto l'equazione della retta s sarà del tipo $x=x_0$, ove x_0 è un opportuno numero reale. Ma chi è x_0 ? Siccome la retta passa per il punto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$, la cui ascissa è $\frac{1}{2}$, e siccome tutti i punti della retta hanno ascissa costante (per l'appunto, x_0), allora x_0 deve essere uguale a $\frac{1}{2}$, cioè tutti i punti della retta s hanno ascissa $\frac{1}{2}$. Cioè, l'equazione della retta s è

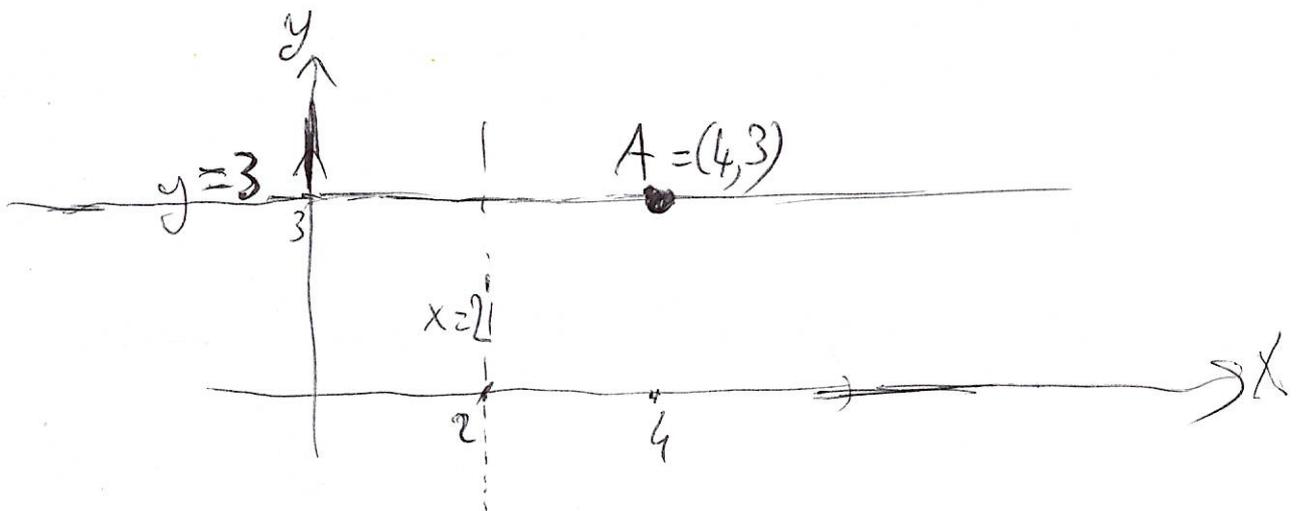
$$\boxed{x = \frac{1}{2}}.$$

-34-

Scrivere l'equazione della retta s perpendicolare alla retta $x=2$ e passante per il punto $A=(4,3)$

La retta $x=2$ è verticale, e quindi una retta perpendicolare alla retta $x=2$ deve essere necessariamente orizzontale, cioè del tipo $y=k$, ove k è un opportuno numero reale. Siccome questa retta (s) deve passare per il punto $(4,3)$, allora k deve essere necessariamente uguale a 3, quindi l'equazione della retta s è

$$\boxed{y=3}$$



35-

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2. Risolvere le seguenti equazioni:

2.1 $\cos x = 6$ Il coseno assume valori compresi fra -1 ed 1 , e quindi l'equazione non ammette soluzioni.

2.2 $\cos x = \frac{1}{2}$. Innanzi tutto osserviamo

che $\cos \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; infatti, essendo

l'angolo $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ e l'angolo $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

allora l'angolo \widehat{OAB} misura $180^\circ - 90^\circ - 60^\circ =$

$= 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Pertanto il triangolo rettangolo AOB

è la metà di un triangolo equilatero, e

quindi, essendo $\overline{OA} = 1$ (raggio della circonferenza

goniometrica), si ha $\overline{OB} = \frac{1}{2}$. Ma \overline{OB} è proprio $\cos \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ$,

per definizione stessa della funzione coseno. Consideriamo le

nuove coordinate (polari) $X = \cos x$, $Y = \sin x$. La retta $X = \frac{1}{2}$

incontra la circonferenza goniometrica nei due punti A e C .

Al punto A corrisponde l'angolo di $\frac{\pi}{3}$ (radianti), mentre al

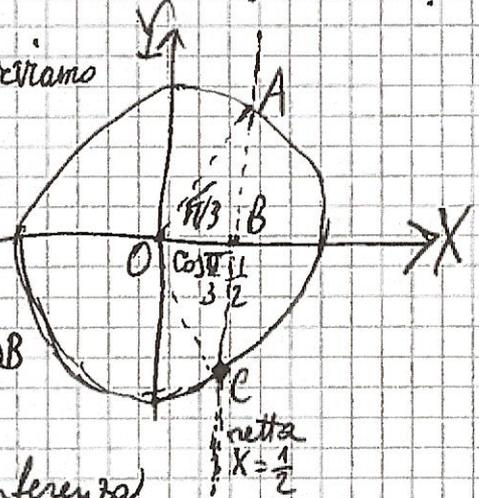
punto B , per simmetria, corrisponde l'angolo $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$.

Nella circonferenza goniometrica, dunque, le

soluzioni sono $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5}{3}\pi$. Tenendo conto che il coseno è una funzione

periodica di periodo 2π , otteniamo che la totalità delle soluzioni

è: $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$, ove $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$



36-

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2: Risolvere le seguenti equazioni:

2.3 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Disegniamo la circonferenza goniometrica.Osserviamo, innanzi tutto, che $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Infatti ilcoseno di 45° è espresso dalla lunghezza OP . Notiamo anche che il triangolo OPQ in figura

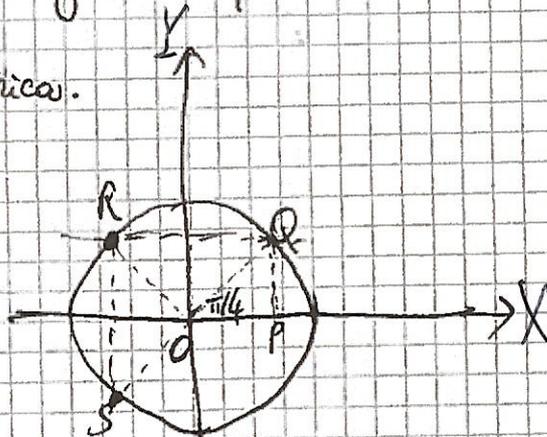
è rettangolo isoscele: infatti

l'angolo OPQ misura 90° , e quindi l'angolo OPQ misura $180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$. Quindi $PQ = OP$. Per il Teorema diPitagora, si ha: $1 = OQ^2 = PQ^2 + OP^2 = 2 \cdot OP^2$. Quindi $OP^2 = \frac{1}{2}$,e di conseguenza $OP = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.Pertanto abbiamo visto che $\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Adessocerchiamo, sempre nella circonferenza goniometrica, i punti x tali che $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Per simmetria, il punto R corrispondeall'angolo $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (stesso seno e coseni opposti) e ilpunto S corrisponde all'angolo $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ (seni e coseni opposti).

Quindi, nella circonferenza goniometrica, le soluzioni sono

 $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. Tenendo conto che la funzione coseno è periodicadi periodo 2π , la soluzione globale è costituita dai punti $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right\}$, ove $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ è

l'insieme di tutti gli interi relativi.



DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2: Risolvere le seguenti equazioni:

2.4 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Innanzi tutto, vediamo che $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A pagina **35**,

nell'esercizio 2.2, abbiamo visto che

il triangolo AOB è la metà di un

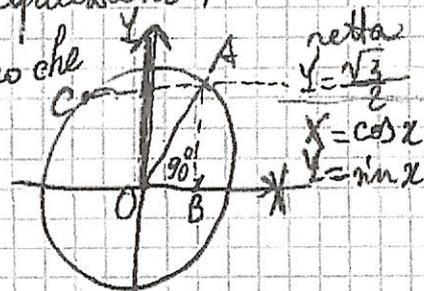
triangolo equilatero, e che, visto che $OA=1$

(raggio della circonferenza goniometrica in figura),

si ha $OB = \frac{1}{2}$. Notiamo che $BA = \sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ$. Per il

teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OAB, si ha:

$$1 = OA^2 = BA^2 + OB^2 = BA^2 + \frac{1}{4}, \text{ e quindi } BA^2 = \frac{3}{4}, \text{ da cui } BA = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Consideriamo le nuove coordinate (polari) $X = \cos x$, $Y = \sin x$ La retta $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ incontra la circonferenza goniometrica nei due punti A (al quale corrisponde l'angolo $\frac{\pi}{3}$) e C (al quale, per simmetria, corrisponde l'angolo $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$).Nella circonferenza goniometrica, dunque, le soluzioni sono $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. Tenendo conto che il seno è una funzione periodica di periodo 2π , otteniamo che la soluzione globale è data daipunti $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$, ove $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

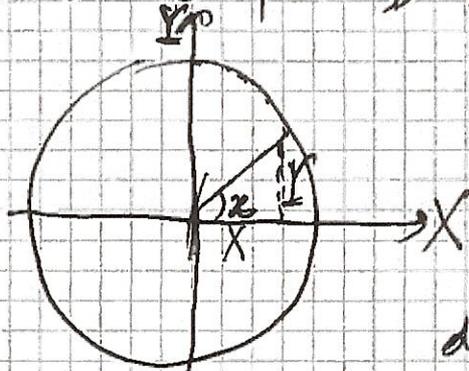
DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio 2: Risolvere le seguenti equazioni:

2.5 $\sin x = \cos x$

Consideriamo la circonferenza goniometrica (di centro l'origine e raggio 1) e passiamo alle coordinate "polari", $X = \cos x$, $Y = \sin x$



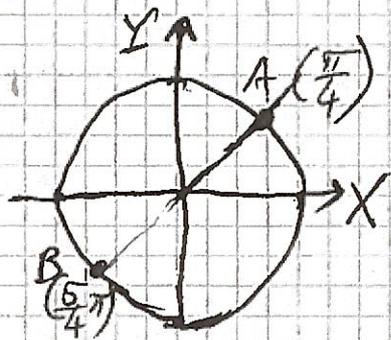
L'equazione della circonferenza goniometrica, in coordinate "polari", è $X^2 + Y^2 = 1$ (circonferenza di centro l'origine (0,0) e raggio 1). Il "trucco" è di passare alle coordinate "polari" e di aggiungere sempre l'equazione $X^2 + Y^2 = 1$.

Quindi, nelle nuove coordinate X ed Y , ci troviamo di fronte al seguente sistema:

$$\begin{cases} Y = X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

si ottiene: $2X^2 = 1 \quad X^2 = \frac{1}{2}$
 $X = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ Abbiamo 2 casi:

1° caso: $X = Y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ~~Aggiung.~~ Nell'esercizio 2.3, abbiamo visto che $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



quindi il 1° caso corrisponde al valore $x = \frac{\pi}{4}$. Nel secondo caso si ottiene $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Nel caso di seno e coseno contemporaneamente opposti, si considera il valore $\pi + x$ associato ad x . Nel nostro caso, si ottiene il valore $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Quindi, nella circonferenza goniometrica, ci sono due soluzioni: $x = \frac{\pi}{4}$ ed $x = \frac{5\pi}{4}$. In generale, l'insieme completo di tutte le soluzioni è $\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \}$

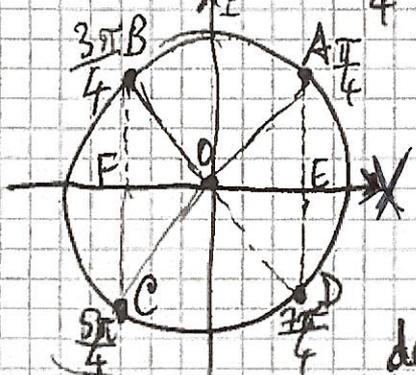
ove $k = \{ 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots \}$, visto che \sin e \cos sono periodiche di periodo 2π .

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche
Esercizio 2: Risolvere le seguenti equazioni:

2.6 $\operatorname{tg} x = -1$

Nell'esercizio 12.3 abbiamo visto che $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($= \cos 45^\circ$),
 mentre $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($= \cos 135^\circ$). Per l'identità



fondamentale della trigonometria
 $(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$, si ha: $\sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{4} =$
 $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Essendo $\frac{\pi}{4}$ nel 1° Quadrante

allora $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (è positivo).

Sempre per l'identità fondamentale
 della trigonometria, si ha: $\sin^2 \frac{3\pi}{4} = 1 - \cos^2 \frac{3\pi}{4} =$
 $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Essendo $\frac{3\pi}{4}$ nel 2° Quadrante, allora

$\sin \frac{3\pi}{4}$ è positivo, quindi $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Allora si ha

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1. \text{ Per simmetria, si avrà}$$

anche $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1$ (seno e coseno opposti) e quindi stessa

tangente: questo accade in generale ogni volta che α sono
 due angoli che differiscono di π). Quindi, nella circonferenza
 goniometrica, le soluzioni dell'equazione data sono $x = \frac{3\pi}{4}$ ed $x = \frac{7\pi}{4}$.

Osserviamo che la disequazione data **2.6** può essere risolta
 anche in quest'altro modo. Invece di $\operatorname{tg} x = -1$ si può scrivere

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \text{ (con questa scrittura, ovviamente, } \cos x \text{ dev'essere diverso da 0)}$$

da cui $\sin x = -\cos x$. Passando a coordinate "polari" $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$

come nell'esercizio **2.5** e inserendo l'equazione della
 circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$ (trucco!), si ottiene $\begin{cases} Y = -X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

Cioè $x^2 + (-x)^2 = 1$, e quindi $2x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1}{2}$ ed $Y^2 = \frac{1}{2}$, quindi - diciamo -

$$X = \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, Y = \sin x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (scrivo prima } \pm \text{ e poi } \mp \text{ per}$$

indicare che i segni devono essere discordi, ottenendo i punti B e D
 in figura, che corrispondono rispettivamente ad $x = \frac{3\pi}{4}$ ed $x = \frac{7\pi}{4}$). Infatti...

... Continua nella pagina seguente ...

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE
Esercizio 2.6 (equazioni trigonometriche) (continuazione)

Infatti nel punto A il seno e il coseno sono positivi (rispettivamente le lunghezze dei segmenti orientati \overline{EA} ed \overline{OE}), nel punto B il seno è positivo e il coseno è negativo (rispettivamente le lunghezze dei segmenti orientati \overline{FB} ed \overline{OF}), nel punto C il seno e il coseno sono negativi (rispettivamente le lunghezze dei segmenti orientati \overline{FC} ed \overline{OF}), e nel punto D il seno è negativo (lunghezza del segmento orientato \overline{ED}) e il coseno è positivo (lunghezza del segmento orientato \overline{OE}), e quindi il seno e il coseno sono discordi nei punti B e D.

Quindi anche attraverso quest'altro procedimento si ottiene che, nella circonferenza goniometrica, le soluzioni della disequazione sono $x = \frac{3}{4}\pi$ ed $x = \frac{7}{4}\pi$.

La soluzione globale (tenendo conto del fatto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π) è:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right\}, \text{ con } k = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

Si può scrivere anche: $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (in un modo più semplice).

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

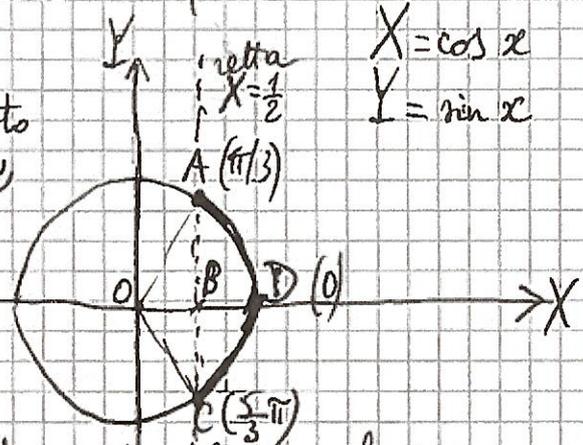
Esercizio B: Risolvere le seguenti disequazioni:

B.1 $\cos x \geq \frac{1}{2}$

Nell'esercizio 2.2, abbiamo visto che, nella circonferenza goniometrica, i valori x delle soluzioni dell'equazione $\cos x = \frac{1}{2}$ sono $\frac{\pi}{3}$ (il punto corrispondente è A) e $\frac{5\pi}{3}$ (il punto corrispondente è C). Quindi,

sempre nella circonferenza goniometrica, i valori soluzione della disequazione $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sono quelli a destra della retta $X = \frac{1}{2}$ in figura, cioè quelli dell'arco ADC, cioè i punti $x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$. Tenendo conto che il coseno è una funzione periodica di periodo 2π , la soluzione globale della disequazione data è costituita dai punti

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left([2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi] \cup [\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[\right), \text{ ove } k = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

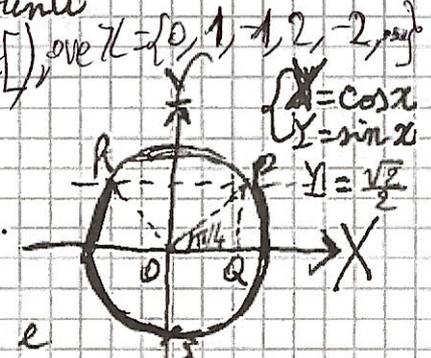


$$\begin{aligned} X &= \cos x \\ Y &= \sin x \end{aligned}$$

Esercizio B.2 $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ Consideriamo la circonferenza goniometrica (di centro l'origine e raggio 1).

Il triangolo OPQ in figura è rettangolo e isoscele, in quanto, essendo l'angolo \widehat{POQ} di $\frac{\pi}{4}$ e l'angolo \widehat{PQO} di $\frac{\pi}{2}$, l'angolo \widehat{OPQ} varia di $\pi - (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$. Quindi $\overline{QP} = \overline{OQ}$. Ma, dalla definizione di seno, $\overline{QP} = \sin \frac{\pi}{4}$ (valore positivo), e dal teorema di Pitagora si ha: $1 = \overline{OP}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{OQ}^2 = 2 \cdot \overline{QP}^2$, da cui $\overline{QP}^2 = \frac{1}{2}$, e quindi $\overline{QP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per simmetria, visto che $\sin(\pi - x) = \sin x$, si ha anche: $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi, nella circonferenza goniometrica, l'insieme soluzione è: $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, 2\pi[$ (cioè i punti dell'arco PSR in figura). Tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π , la soluzione globale della disequazione è:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left([2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi] \cup [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[\right), \text{ ove } k = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$



$$\begin{aligned} X &= \cos x \\ Y &= \sin x \end{aligned}$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

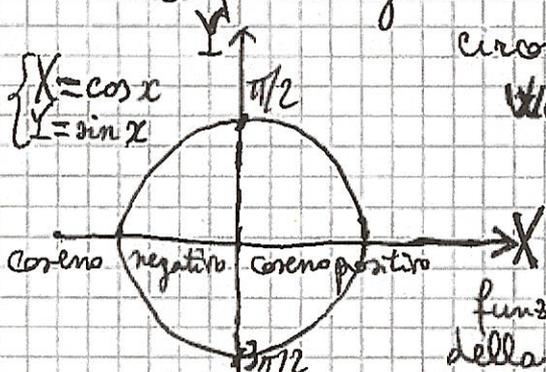
Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio B: risolvere le seguenti disequazioni:

Esercizio B.3 $\cos x + 4 \leq 0$ si ha $\cos x \leq -4$, e quindi questa disequazione non ammette soluzioni reali, in quanto la funzione coseno ammette valori compresi fra -1 ed 1 .

Esercizio B.4 $\cos x + 4 \geq 0$ si ha: $\cos x \geq -4$. Questa disequazione è sempre verificata, in quanto il coseno è sempre ≥ -1 , e a maggior ragione maggiore di -4 .

Esercizio B.5 $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \leq 0$. Poniamo $w = x + \frac{\pi}{3}$. Nell'esercizio 11, p. 47, avevamo visto che il coseno è positivo (o nullo) nei punti della zona "est", della circonferenza goniometrica, e quindi il coseno è negativo (o nullo) nei punti della zona "ovest", della circonferenza goniometrica. I punti della zona "ovest", nella



circonferenza goniometrica, sono quei valori $w \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Da $w = x + \frac{\pi}{3}$ si ha $x = w - \frac{\pi}{3}$, e

quindi $x \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}] = [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$.

Tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π , la soluzione globale della disequazione è data da:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi], \text{ ove } \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}.$$

Esercizio B.6 $\cos(x + \frac{5\pi}{4}) \geq 0$. Poniamo $v = x + \frac{5\pi}{4}$. Con riferimento all'esercizio precedente (~~esercizio 11, p. 47~~), i punti della circonferenza goniometrica dove il coseno è positivo o nullo sono i punti

$v \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. Poiché $v = x + \frac{5\pi}{4}$, allora $x = v - \frac{5\pi}{4}$, e

quindi si ottiene $x \in [-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4}, 2\pi - \frac{5\pi}{4}] = [-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Ma l'intervallo $[-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}]$ non è contenuto in $[0, 2\pi[$. Poiché la funzione coseno è periodica di periodo 2π , è equivalente a $[-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}]$ considerare l'intervallo $[2\pi - \frac{5\pi}{4}, 2\pi - \frac{3\pi}{4}] = [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Quindi si ottiene:

$x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] = [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ (nella circonferenza goniometrica). La soluzione globale è $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$, ove $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

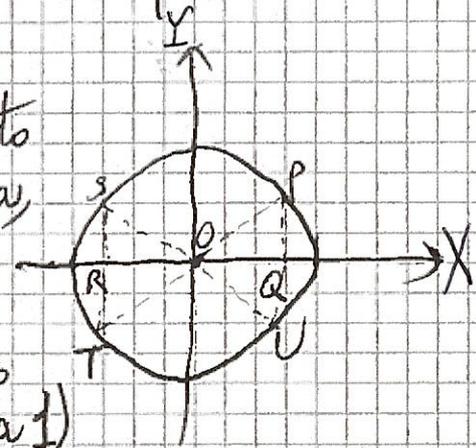
Esercizio **B**: Risolvere le seguenti disequazioni:

Esercizio **B.7**: $\sin x \cos x \geq 0$

Negli esercizi precedenti abbiamo visto che, nella circonferenza goniometrica, il seno è positivo o nullo in $[0, \pi]$

(nella figura, le lunghezze dei segmenti orientati \overline{QP} ed \overline{RS} , essendo il raggio della circonferenza uguale a 1)

ed è negativo o nullo in $[\pi, 2\pi]$ (nella figura, le lunghezze dei segmenti orientati \overline{QU} ed \overline{RT}). Inoltre il coseno

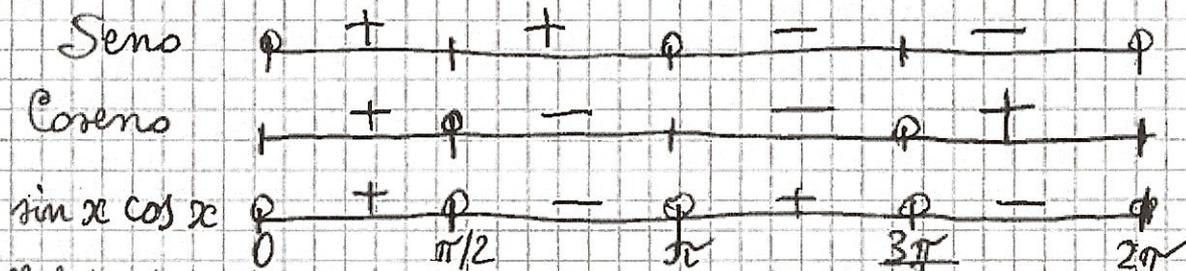


è positivo o nullo in $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, mentre è negativo o nullo in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

| | |
|-----------------|-----------------------------|
| Per ricordarsi: | Zona Nord: seno positivo |
| | Zona Sud: seno negativo |
| | Zona Est: coseno positivo |
| | Zona Ovest: coseno negativo |

(rispettivamente, lunghezza del segmento orientato \overline{OQ} e lunghezza del segmento orientato \overline{OR}).

Quindi, in $[0, 2\pi]$ si ha:



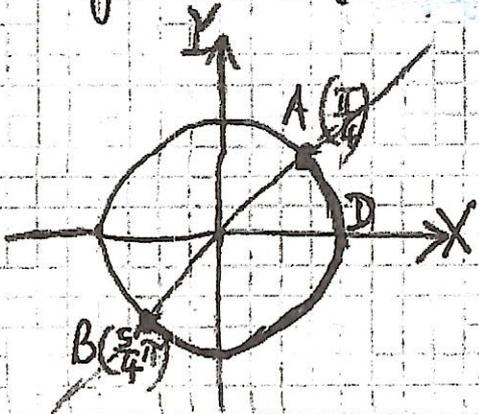
Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (cioè, sostanzialmente, nella circonferenza goniometrica), le soluzioni della disequazione data sono quei valori che rendono positivo o nullo il prodotto $\sin x \cos x$, cioè i numeri $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Quindi, tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π , la soluzione globale è data da $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \cup [\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi])$, ove $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio B: Risolvere le seguenti disequazioni:

B.8 $\sin x \leq \cos x$ Consideriamo la circonferenza goniometrica, cioè la circonferenza di centro l'origine $(0,0)$ e di raggio 1. Consideriamo le coordinate "polari", $X = \cos x$, $Y = \sin x$, e l'equazione associata $\sin x = \cos x$, che abbiamo già studiato. Questa equazione - abbiamo visto -



corrisponde al sistema $\begin{cases} Y = X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

e ammette, nella circonferenza goniometrica, le due soluzioni $x = \frac{\pi}{4}$ (punto A) ed $x = \frac{5\pi}{4}$ (punto B). La disequazione data corrisponde al sistema $\begin{cases} Y \leq X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$, che ha per solu-

zione i punti della circonferenza goniometrica ($X^2 + Y^2 = 1$) che appartengono all'arco ADB, estremi A e B esclusi (Y dev'essere più piccolo di X, e quindi la bisettrice del 1° e del 3° Quadrante divide il piano in due zone, e si deve prendere quella che sta a "sud-est", della bisettrice). Quindi, nella circonferenza goniometrica, la soluzione della disequazione data è costituita dai punti x appartenenti all'insieme $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$. L'insieme "soluzione globale", è allora

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left([2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi] \cup [\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \right), \text{ ove}$$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ è l'insieme dei numeri interi relativi, tenendo conto che seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π .

Esercizio B.8 bis $\sin x < \cos x$ Analogamente alla disequazione precedente, il sistema corrispondente è $\begin{cases} Y < X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ e questa volta i punti del tipo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, non vanno presi. Si ottiene che la soluzione "globale" è $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left([2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi[\cup]\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \right)$.

ESERCIZIO 1) Determinare il centro e il raggio della circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0$$

(è veramente una circonferenza? ...)

Negli appunti viene seguita la seguente tecnica, che permette di pensare al centro e al raggio senza imparare formule a memoria. Il "trucchetto" è:

cerchiamo di ricondurci a espressioni che riguardano centro, raggio, distanza, cioè del tipo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \text{ ossia } \begin{matrix} (x_0, y_0 \text{ sono le coordinate} \\ \text{del centro ed } R \text{ è il raggio)} \end{matrix}$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - R^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0, \text{ che dev'essere uguale a}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0. \text{ Quindi i corrispondenti coefficienti devono essere uguali, cioè } -2x_0 = -6 \quad x_0 = 3$$

$$-2y_0 = -6 \quad y_0 = 3 \quad x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 17 \quad 3^2 + 3^2 - R^2 = 17$$

$$18 - R^2 = 17 \quad R^2 = 1 \quad R = 1$$

Pertanto le coordinate del centro sono (3,3) e il raggio R è 1, quindi si tratta veramente di una circonferenza.

~~ESERC. 42~~

46-

f. 2) Determinare il centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$.

È veramente una circonferenza, oppure no?

Pensiamo subito direttamente al centro e al raggio: l'equazione della circonferenza viene introdotta nella forma

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, ove x_0, y_0 sono le coordinate del centro ed R è il raggio, cioè

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - R^2 = 0,$$

che dev'essere uguale a

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$. I rispettivi coefficienti devono essere uguali, e quindi

$$-2x_0 = -2 \quad -2y_0 = -2 \quad x_0^2 + y_0^2 - R^2 = -5$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 1 \quad 1 + 1 - R^2 = -5 \quad -R^2 = -7 \quad R^2 = 7$$

$R = \sqrt{7}$; quindi il centro è il punto $(1, 1)$, mentre il raggio R è $\sqrt{7}$. Si tratta VERAMENTE di una circonferenza.

~~47~~
ESERCIO 4.3)

4.3) Scrivere l'equazione della circonferenza \mathcal{C} di raggio 1 e centro nel punto di intersezione delle rette $y=x$, $y=-x+6$.

Determiniamo il punto di intersezione (x_0, y_0) richiesto.

$$\begin{cases} y=x \\ y=-x+6 \end{cases} \quad \text{Si deve avere } x_0 = -x_0 + 6 \quad 2x_0 = 6 \quad x_0 = 3$$

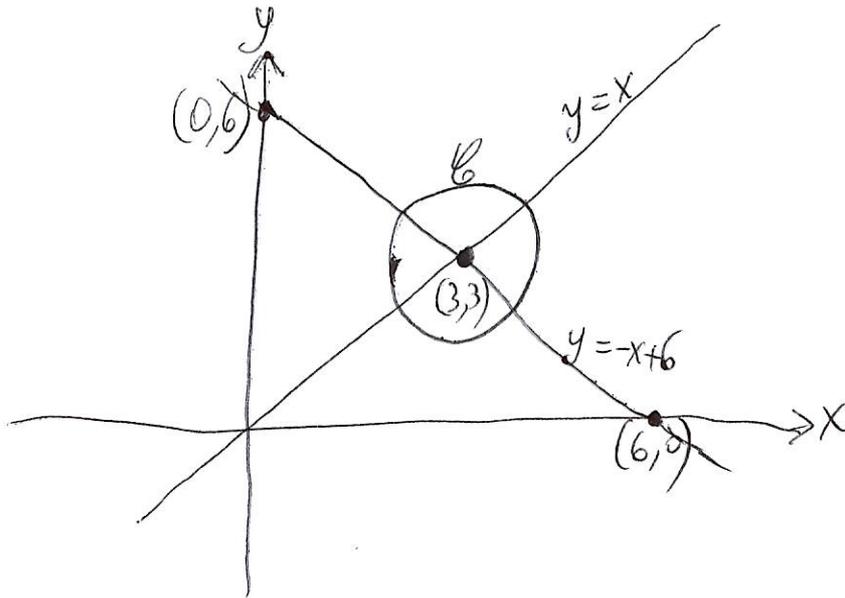
e quindi anche $y_0 = 3$

Quindi $(x_0, y_0) = (3, 3)$.

L'equazione della circonferenza \mathcal{C} di centro $(3, 3)$ e raggio 1 è: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$, cioè

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 1, \text{ ossia}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0$$



ESERCIZIO 44)

- 48 -

4.4) Trovare i punti di intersezione fra la retta r di equazione $y = 2x + 1$ e la circonferenza C di equazione

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

$$C \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ r \begin{cases} y = 2x + 1 \end{cases} \end{cases} \quad (C \text{ è la circonferenza di centro } (1,1) \text{ e raggio } 1)$$

Sostituendo l'espressione $y = 2x + 1$ nell'equazione di C , si ottiene

$$(x-1)^2 + (2x+1-1)^2 = 1$$

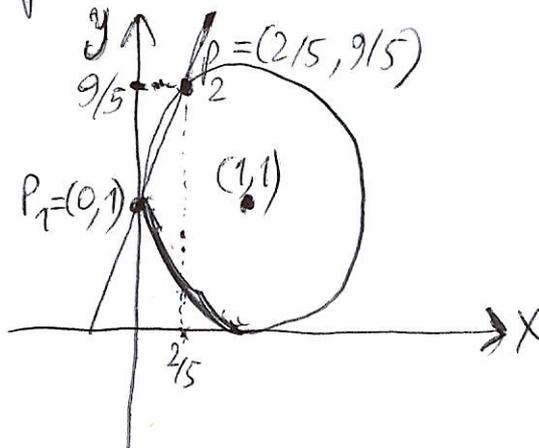
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 = 1 \quad 5x^2 - 2x = 0, \text{ cioè } x \cdot (5x - 2) = 0,$$

da cui $x = 0$ oppure $5x - 2 = 0$, cioè $x = \frac{2}{5}$.

In corrispondenza ad $x = 0$ si ha $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$;

in corrispondenza ad $x = \frac{2}{5}$ si ha $y = 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$.

Quindi i due punti di intersezione sono $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$



ESERC 45)

-19-

4.5) Scrivere l'equazione della circonferenza \mathcal{C} che passa per $A = (4, 1)$, $B = (1, 5)$ e ha centro nel loro punto medio.

Le coordinate (\bar{x}, \bar{y}) del punto medio di (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, cioè nel nostro caso

$$(\frac{4+1}{2}, \frac{1+5}{2}) = (\frac{5}{2}, 3).$$

L'equazione generica della circonferenza \mathcal{C} di centro (x_0, y_0) e raggio R è $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, quindi nel nostro caso $(x-\frac{5}{2})^2 + (y-3)^2 = R^2$.

Ora troviamo R imponendo il passaggio per i punti $A = (4, 1)$ e $B = (1, 5)$. Per il passaggio per A , sostituiamo x con 4 ed y con 1 , ottenendo $(4-\frac{5}{2})^2 + (1-3)^2 = R^2$

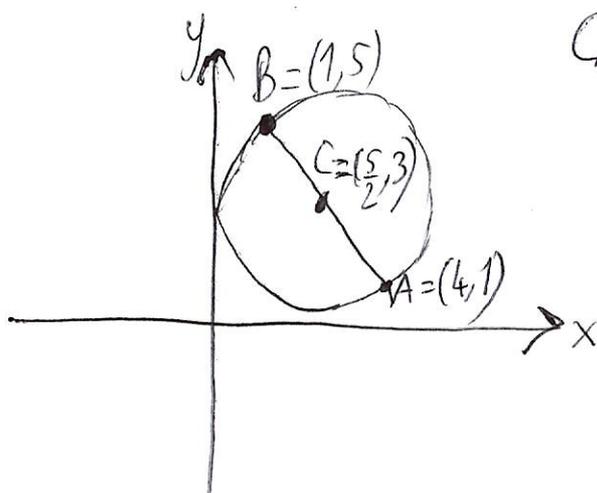
$$(\frac{3}{2})^2 + (-2)^2 = R^2 \quad \frac{9}{4} + 4 = R^2 \quad R^2 = \frac{9+16}{4} = \frac{25}{4}, \text{ da cui } R = \frac{5}{2}.$$

Verifichiamo che \mathcal{C} passa anche per il punto B .

L'equazione di \mathcal{C} è $(x-\frac{5}{2})^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}$ Sostituiamo

x con 1 ed y con 5 : si ottiene $(1-\frac{5}{2})^2 + (5-3)^2 = (-\frac{3}{2})^2 + 2^2 = \frac{9}{4} + 4 = \frac{9+16}{4} = \frac{25}{4}$, come si voleva dimostrare.

-20-



C è il punto medio tra A e B

Per scrivere l'equazione di \mathcal{C} , si può anche applicare il seguente metodo geometrico: si calcola la distanza tra B e C (oppure tra A e C): questa distanza sarà il raggio R della nostra circonferenza. Si ha:

$$\begin{aligned} \text{dist}(B, C) &= \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 2^2} = \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{9 + 16}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, C) &= \sqrt{\left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}. \end{aligned} \text{ Quindi } R = \frac{5}{2}, \text{ e l'equazione di } \mathcal{C} \text{ è}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4} (=R^2), \text{ cioè}$$

$$x^2 + \frac{25}{4} - 5x + y^2 + 9 - 6y = \frac{25}{4}$$

$$x^2 - 5x + y^2 - 6y + 9 = 0, \text{ ossia } x^2 + y^2 - 5x - 6y + 9 = 0.$$

ESERC. 46



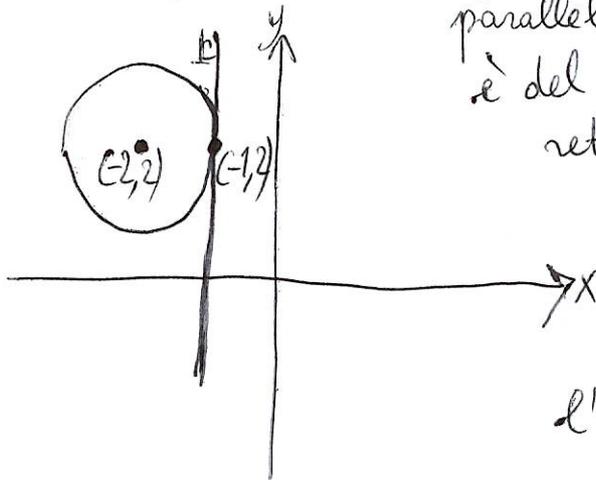
4.6.) Scrivere l'equazione della circonferenza C di centro $(-2, 2)$ e raggio 1 e l'equazione della retta r tangente a C nel punto di coordinate $(-1, 2)$ e parallela all'asse y .

L'equazione della circonferenza di centro $(-2, 2)$ e raggio 1 è: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ cioè

$$x^2 + 4 + 4x + y^2 + 4 - 4y = 1 \quad \text{ossia}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$$

Per determinare l'equazione della retta r , aiutiamoci con un disegno. Dalla figura si vede che la retta r è parallela all'asse delle y , cioè



è del tipo $x = x_0$. Siccome la retta r passa per il punto $(-1, 2)$, x_0 dev'essere uguale a -1 . Quindi

l'equazione della retta r è

$$\boxed{x = -1}.$$

- 12 -

ESERCIZIO 4.7)

Scrivere l'equazione della parabola passante per il punto $P=(2,1)$ e vertice in $V=(0,0)$ (con direttrice parallela all'asse delle x). $\frac{y}{x}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ Si vede a intuito che $a > 0$, cioè la concavità è verso l'alto.

Osserviamo che, in base a quello che è stato detto nel testo adottato, si ha che L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA (CON DIRETTRICE PARALLELA ALL'ASSE DELLE x) AVENTE VERTICE IN $V=(0,0)$ È

$$(*) \quad \boxed{y = \frac{1}{4p} x^2}$$

ove p è l'ordinate del fuoco (che ha coordinate $(0,p)$) e $y = -p$ è l'equazione della direttrice.

Imponiamo ora il passaggio per il punto $P=(2,1)$.

Se nella (*) mettiamo 2 al posto di x e 1 al posto di y si deve ottenere un'identità. E così determiniamo p . Si ha:

$$1 = \frac{1}{4p} \cdot 2^2, \quad \frac{1}{p} = 1, \quad \text{quindi } \boxed{p=1}$$

L'equazione della parabola è $\boxed{y = \frac{1}{4} x^2}$.

Le coordinate del fuoco sono $(0,1)$ e l'equazione della direttrice è $y = -1$.

Esercizio 4.8)

Scrivere l'equazione della parabola passante

per il punto $P=(3,6)$ e avente vertice nel punto $V=(1,2)$
(e con la direttrice parallela all'asse delle x)



Visto che V è il vertice della parabola e che le coordinate del punto P sono tutte e due maggiori delle rispettive coordinate di V , allora da considerazioni

geometriche si deduce che la nostra parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ rivolge la concavità verso l'alto.

Ora, per risolvere questo esercizio, conviene tenere conto del seguente "trucco". Un metodo "veloce" ed "elegante" è quello di ricordarsi la "genesì" dell'equazione della parabola quando si passa dal caso particolare in cui il vertice coincide con $(0,0)$ al caso generale (ove le coordinate del vertice sono indicate con (x_0, y_0)). Nel caso generale, l'equazione della parabola (v. testo adottato) è

$$y - y_0 = \frac{1}{4p} \cdot (x - x_0)^2$$

Nel nostro caso $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, quindi si ha

$$(*) \quad y - 2 = \frac{1}{4p} \cdot (x - 1)^2$$

Ora determiniamo p , imponendo il passaggio per $P=(3,6)$. Se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6, la (*) deve diventare un'identità. Si ha:

$$6 - 2 = \frac{1}{4p} \cdot (3 - 1)^2, \text{ cioè } 4 = \frac{1}{4p} \cdot 4 \quad \frac{1}{p} = 4 \quad 4p = 1 \quad \boxed{p = \frac{1}{4}}$$

e quindi l'equazione della parabola è $y - 2 = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} \cdot (x - 1)^2$ cioè

$$\boxed{y - 2 = (x - 1)^2}, \text{ ossia } y = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3. \text{ Quindi l'equazione è}$$

$$\boxed{y = x^2 - 2x + 3}$$

Esercizio 4,9 - 54 -

Facciamo una specie di "viceversa", o di "prova", dell'esercizio precedente, cioè:

Dimostrare che la parabola di equazione

$$y = x^2 - 2x + 3$$

passa per il punto $P=(3,6)$ e ha vertice in $V=(1,2)$

Innanzitutto osserviamo che, se al posto di x ci mettiamo 3 e al posto di y ci mettiamo 6, otteniamo

$$6 = 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 9 - 6 + 3 = 3 + 3, \text{ che è vero.}$$

Quindi la nostra parabola passa per $P=(3,6)$.

Adesso ricordiamo che le coordinate del vertice della parabola sono date da $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Nel nostro caso, $a=1$, $b=-2$, $c=3$, e quindi

$$x_0 = \frac{2}{2} = 1, \quad y_0 = \frac{4 \cdot 3 - 4}{4} = \frac{8}{4} = 2, \text{ come si voleva provare.}$$

[Come una curiosità: si può dimostrare che il vertice $V=(1,2)$ è veramente un elemento della nostra parabola. Infatti, se nella $(+)$ al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 2, otteniamo $2 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = -1 + 3$, che è vero.]

~~15~~

4.10) Determinare il fuoco, il vertice e la direttrice della parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 1$

Si ha: $a = -2$ $b = 1$ $c = 1$. Poniamo Δ (= discriminante) $= b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9$. Si ha:

$$\text{vertice} = V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{1}{2 \cdot (-2)}, \frac{-9}{4 \cdot (-2)} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8} \right);$$

$$\text{fuoco} = F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{1}{2 \cdot (-2)}, \frac{-8}{4 \cdot (-2)} \right) = \left(\frac{1}{4}, 1 \right);$$

$$\text{direttrice: } y = -\frac{(1+\Delta)}{4a} = -\frac{10}{4 \cdot (-2)} = \frac{5}{4} \quad (y = \frac{5}{4})$$

ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA

ESERCIZIO 4.11) Scrivere l'equazione della parabola passante per $A_1 = (-1, 3)$, $A_2 = (0, 2)$ ed $A_3 = (1, 3)$

(tenendo conto che la sua direttrice è parallela all'asse x).

Si tratta di un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
Determiniamo i valori di a, b, c imponendo il passaggio per i punti A_1, A_2, A_3 . Si deve avere:

$$A_1: 3 = a - b + c \quad (\text{perché } 3 = a \cdot (-1)^2 + (-1)b + c)$$

$$A_2: 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \quad \boxed{c=2}$$

$$A_3: 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$

Da A_1 e A_3 si ottiene $a - b + c = a + b + c$ cioè $-b = b \Rightarrow 0 = 2b \Rightarrow b = 0$

$\boxed{b=0}$ Determiniamo ora a , sostituendo i valori ottenuti di b e c nell'equazione A_1 (o equivalentemente nell'equazione A_3).

Si ha: $3 = a - 0 + 2$, quindi $a = 3 - 2 = 1$.

L'equazione della parabola è quindi $\boxed{y = x^2 + 2}$

-57-

DALL' ESERCIZIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 5: equazioni e disequazioni

Esercizio 5.1: $8(5-x) + 3(x-5) > 0$

Si ha: $40 - 8x + 3x - 15 > 0$, quindi $-5x > -25$, cioè $x < 5$. In termini insiemistici, la soluzione è: $x \in]-\infty, 5[$

Esercizio 5.2: $(3x+1)^2 - 4x(x-2) \leq 5x(x+6) - 16x$

$$9x^2 + 1 + 6x - 4x^2 + 8x \leq 5x^2 + 30x - 16x$$

$4x^2 - 4x^2 + 1 + 14x \leq 14x$, da cui $1 \leq 0$. Questo è impossibile, e quindi la disequazione non ammette soluzioni.

Esercizio 5.3 $x^2(x-1) \geq 0$

Notiamo, innanzi tutto, che $x=0$ è soluzione della disequazione data. Consideriamo ora il caso $x \neq 0$.

In questo caso si ha $x^2 > 0$, e quindi la disequazione è equivalente a $\frac{x^2(x-1)}{x^2} \geq 0$, cioè $x-1 \geq 0$, ossia $x \geq 1$.

Quindi, dal punto di vista insiemistico, la soluzione è: $x \in [1, +\infty[\cup \{0\}$ (e non $x \in]1, +\infty[\cup \{0\}$).

Esercizio 5.4 $x^2 - x - 6 = 0$

Si tratta di un'equazione di secondo grado. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

Pertanto la soluzione dell'equazione data è $\{3, -2\}$ (e non $\{3, 2\}$).

~~88~~

Esercizi sulle equazioni e disequazioni (esercizio di ispirazione)
DISEQUAZIONI FRATTE.

5.4) $\frac{x^2 - 5x + 8}{9 - x^2} < 0$

Numeratore: Studiamo l'equazione $x^2 - 5x + 8 = 0$.

Il discriminante è $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 8 = 25 - 32 = -7 < 0$

Quindi il trinomio $x^2 - 5x + 8$ è sempre positivo, e allora la disequazione è verificata se e solo se $9 - x^2 < 0$, cioè $x^2 - 9 > 0$. Le radici dell'equazione associata $x^2 - 9 = 0$, cioè $x^2 = 9$, sono 3 e -3, e si prendono i valori esterni. Pertanto la soluzione della disequazione è $x > 3$ oppure (unione insiemistica) $x < -3$, cioè $x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

5.6) $\frac{2x-1}{x-3} < \frac{x+1}{x-1}$. Innanzi tutto, deve essere $x \neq 3$ ed $x \neq 1$.
La disequazione è soddisfatta \Leftrightarrow (se e solo se) $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+1}{x-1} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-1) - (x+1)(x-3)}{(x-3) \cdot (x-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 2x + 1 - x^2 - x + 3x + 3}{(x-3) \cdot (x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 4}{(x-3) \cdot (x-1)} < 0.$$

Osserviamo che, nel trinomio $x^2 - x + 4$, $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$, e quindi il numeratore è sempre positivo. Quindi x è soluzione se e solo se la frazione, calcolata nel punto x , assume valori negativi, se e solo se $(x-3) \cdot (x-1) < 0$, quindi per valori INTERNI alle due radici 1 e 3. Pertanto la soluzione della disequazione è $\mathbf{1} < x < 3$, cioè $x \in]1, 3[$ (I punti 1 e 3 sono esclusi)

ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio 5.7: Risolvere la seguente disequazione fratta:

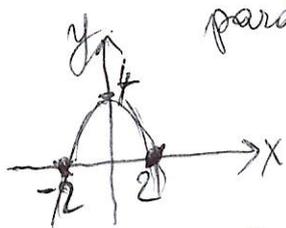
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{4 - x^2} \leq 0$$

Studiamo dapprima il numeratore, Risolvendo l'equazione $x^2 - 4x + 3 = 0$, si ha:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Quindi il numeratore si annulla nei punti 1 e 3, è positivo per valori esterni (ossia $x > 3$ oppure $x < 1$) ed è negativo per valori interni (cioè $1 < x < 3$).

Il denominatore è $4 - x^2$. Risolvendo l'equazione $4 - x^2 = 0$, si ha $x^2 = 4$, quindi le radici sono $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Siccome nella parabola $y = 4 - x^2$, cioè $y = -x^2 + 4$, si ha che $a = -1 < 0$, allora per quanto visto nel "Testo adottato", la quantità



$4 - x^2$ è positiva per valori interni (quindi per $-2 < x < 2$) e negativa per valori esterni (cioè per $x > 2$ oppure $x < -2$), e si annulla nei punti ± 2 . Si ha quindi:

| | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|
| Numeratore | + | - | + | - | + |
| | - | - | 1 | 2 | 3 |
| Denominatore | - | + | + | - | - |
| | - | - | 1 | 2 | 3 |
| Frazione | - | + | - | + | - |
| | - | - | 1 | 2 | 3 |

Non si può dire: non esiste, non è definita
 Quindi la soluzione della disequazione (cioè l'insieme dei punti dove la frazione è ≤ 0) è data da $x \in]-\infty, -2[\cup [1, 2[\cup [3, +\infty[$, vale a dire $x < -2$ oppure $1 \leq x < 2$ oppure $x \geq 3$ (i punti in cui la frazione vale 0 devono essere compresi, mentre i punti in cui la frazione non è definita devono essere esclusi).
 0 = vale zero

DISEQUAZIONI

FRATTE

~~B1~~ - 61 -

Esercizio
5.9

$$\frac{3}{x-2} < \frac{2x}{3+x}$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Innanzitutto notiamo che, affinché quello che c'è scritto abbia senso, dev'essere $x \neq 2$ ed $x \neq -3$ (perché non si può dividere per 0).

Notiamo che $x-2$ e $3+x$ non è detto che siano sempre positive, e quindi - in generale - non si può fare il "prodotto a croce". Procediamo allora nel seguente modo:

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{3+x} < 0 \Leftrightarrow (\text{mol dire "se e solo se"})$$

$$\frac{3(3+x) - 2x(x-2)}{(x-2) \cdot (3+x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{9 + 3x - 2x^2 + 4x}{(x-2) \cdot (3+x)} < 0 \Leftrightarrow$$

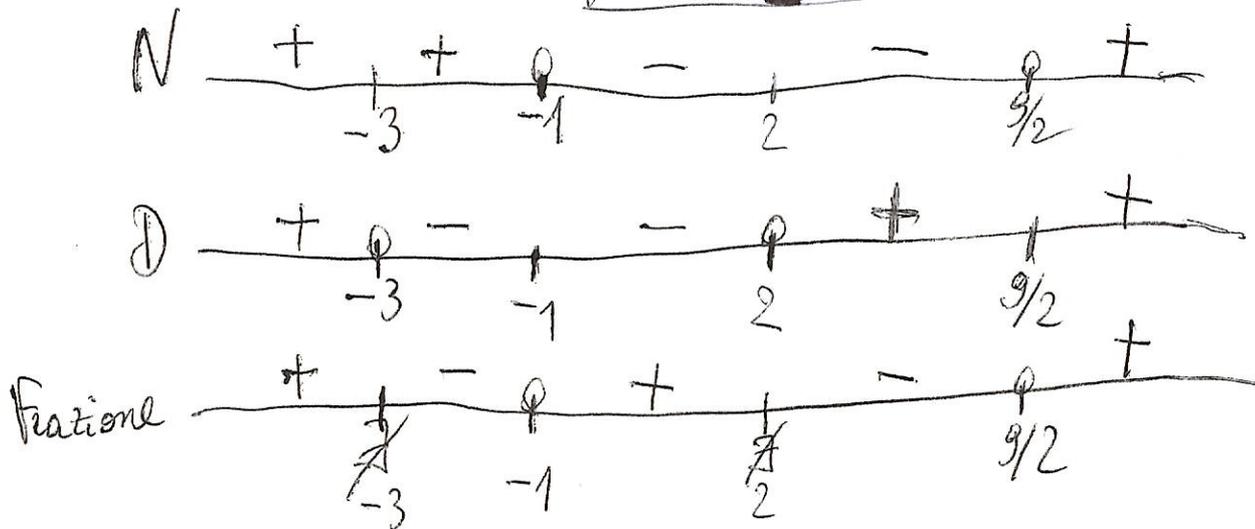
$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 7x + 9}{(x-2) \cdot (3+x)} < 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{moltiplicando per } -1 \text{ e} \\ \text{cambiando il verso} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x - 9}{(x-2) \cdot (3+x)} > 0. \quad \text{Studiamo ora separatamente il numeratore (N) e il denominatore (D).}$$

N: risolviamo l'equazione di 2° grado $2x^2 - 7x - 9 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{7 \pm 11}{4} \begin{array}{l} \nearrow 9/2 \\ \searrow -1 \end{array}$$

N è positivo per valori esterni a $[-1, 9/2]$ e negativo per valori interni. D: le radici sono 2 e -3, quindi D è positivo per valori esterni a $[-3, 2]$ e negativo per valori interni.



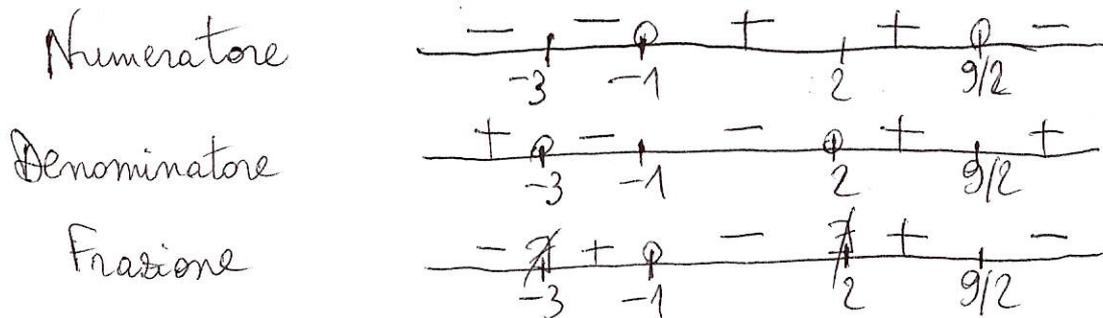
La soluzione della disequazione è costituita da tutti e soli i punti dove la frazione è positiva, cioè per

$$x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 2[\cup]\frac{9}{2}, +\infty[.$$

Si può fare anche, iniziando come a pag. 31: $\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{3+x} < 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-2x^2 + 7x + 9}{(x-2)(3+x)} < 0$$

Le radici dell'equazione $-2x^2 + 7x + 9 = 0$ sono $\frac{9}{2}$ e -1 e quindi, essendo $a = -2 < 0$, il numeratore è positivo per valori interni a $]-1, \frac{9}{2}[$, negativo per valori esterni e si annulla in -1 ed in $\frac{9}{2}$. Si ha:



La soluzione della disequazione è costituita da quei valori x per i quali la frazione è negativa, cioè per $x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 2[\cup]\frac{9}{2}, +\infty[$ (si ritrova lo stesso risultato)

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 5. equazioni e disequazioni

Disequazioni fratte

Esercizio 6, 10: $\frac{7x-4}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} < \frac{7}{x+2}$

si ha tenendo conto che $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$:

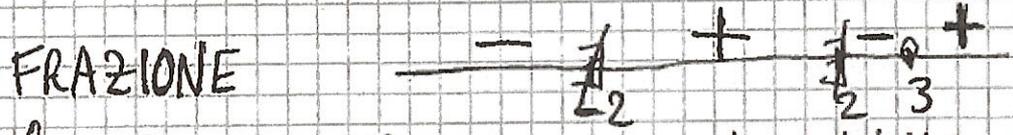
$\frac{7x-4}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{x-2} - \frac{7}{x+2} < 0$

$\frac{7x-4-2(x+2)-7(x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} < 0$

$\frac{7x-4-2x-4-7x+14}{(x+2) \cdot (x-2)} < 0$ $\frac{-2(x-3)}{(x+2) \cdot (x-2)} < 0$

se e solo se $\frac{x-3}{(x+2) \cdot (x-2)} > 0$ Il numeratore è positivo se e solo se $x > 3$,

Il denominatore è positivo per valori ESTERNI all'intervallo $[-2, 2]$. Quindi si ha:



La soluzione della disequazione è costituita da quei valori x per i quali la frazione è positiva, cioè per $x \in]-2, 2[\cup]3, +\infty[$.

-64-

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 5: equazioni e disequazioni

Sistemi di disequazioni

$$\text{Sistema 5.11} \quad \begin{cases} x+2 > 5 \\ x-5 > 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data da tutti i punti x che soddisfano contemporaneamente la prima e la seconda disequazione, cioè dall'intersezione dell'insieme soluzione della prima disequazione con l'insieme soluzione della seconda disequazione.

Soluzione della prima disequazione: $x > 5 - 2 = 3$, cioè $x \in]3, +\infty[$. Soluzione della seconda disequazione: $x > 5$.

Soluzione del sistema: $x \in]3, +\infty[\cap]5, +\infty[=]5, +\infty[$, cioè $x > 5$.



DALL'ESERCIZARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi: Equazioni e disequazioni

Sistemi di disequazioni

Sistema 5.12

$$\begin{cases} (x+2)(x-1) > 4 - (3x-1)^2 \\ (x-1)^2 + (2x+3)^2 > 25 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione:

$$x^2 + 2x - x - 2 > 4 - 9x^2 - 1 + 6x$$

$10x^2 - 5x - 5 > 0$ $2x^2 - x - 1 > 0$ per valori
esterni all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La soluzione della prima disequazione è: $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$

Risolviamo la seconda disequazione:

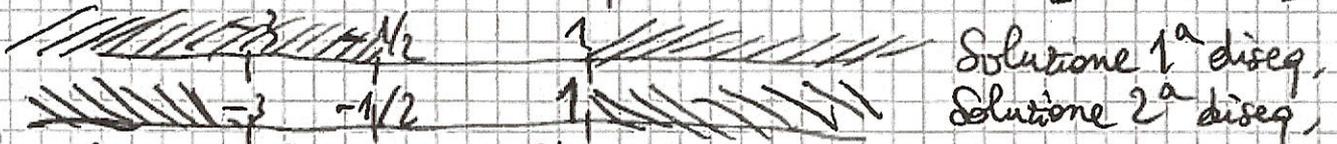
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 > 25$$

$5x^2 + 10x - 15 > 0$ $x^2 + 2x - 3 > 0$ per valori
esterni all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

La soluzione della seconda disequazione è: $x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$



La soluzione del sistema è l'insieme intersezione degli insiemi-
-soluzione delle due disequazioni, quindi $(]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[) \cap (]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[) =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$
(vedi anche figura).

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 1: equazioni e disequazioni
sistemi di disequazioni

Sistema ⁵¹³

$$\begin{cases} \frac{3x+7}{x+1} - \frac{3x-7}{x-1} < 0 \\ 3(x-1)^2 \leq 25-x \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione:

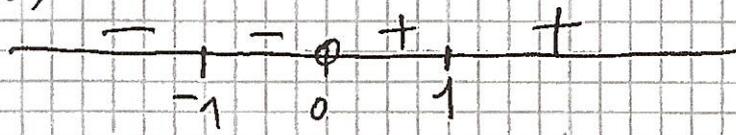
$$\frac{(3x+7)(x-1) - (3x-7)(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{\cancel{3x^2} + 7x - 3x - 7 - \cancel{3x^2} + 7x - 3x + 7}{(x+1)(x-1)} < 0 \text{ se e solo se}$$

(*) $\frac{8x}{(x+1)(x-1)} < 0$ Il numeratore è positivo se e solo se $x > 0$

Il denominatore è positivo se e solo se x è ESTERNO all' intervallo $[-1, 1]$. Studiamo quindi la disequazione in (*)

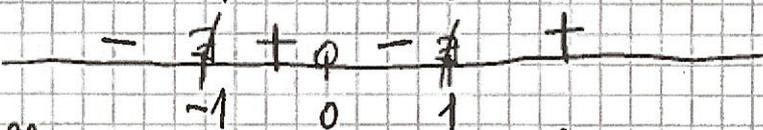
Numeratore



Denominatore



FRAZIONE



La soluzione della prima disequazione è costituita da tutti (e soli) quegli x per i quali è negativa la frazione in (*), cioè $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.

~~69~~

(Sistema 8.13; continuazione)

RisolviAMO la seconda disequazione:

$$3(x-1)^2 \leq 25-x \quad \text{se e solo se} \quad 3 \cdot (x^2 - 2x + 1) \leq 25 - x$$

se e solo se $3x^2 - 6x + 3 \leq 25 - x$ se e solo se

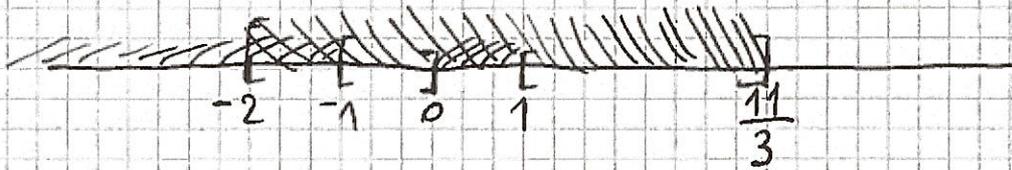
$3x^2 - 5x - 22 \leq 0$, questo è vero per valori interni all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione $3x^2 - 5x - 22 = 0$. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 264}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{5 \pm 17}{6} =$$

$$= \begin{cases} \nearrow 11/3 \\ \searrow -2 \end{cases}$$

Quindi la soluzione della seconda disequazione è: $x \in [-2, \frac{11}{3}]$ (estremi compresi, perché c'è il simbolo \leq , minore o uguale).

La soluzione del sistema 8.13, quindi, è costituita dall'insieme intersezione della soluzione della prima disequazione con la ~~soluzione~~ soluzione della seconda disequazione, cioè per $x \in (-\infty, -1[\cup]0, 1[) \cap [-2, \frac{11}{3}] = [-2, -1[\cup]0, 1[$ (vedi anche figura).



- 29 -

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 4: equazioni e disequazioni
Sistemi di disequazioni

$$\text{Sistema 4.14} \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} > 0 \\ \frac{3}{1-x} > 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione

$\frac{x^2+1}{x} > 0$ Poiché il numeratore è sempre positivo, si ha: $\frac{x^2+1}{x} > 0$ se e solo se $x > 0$, cioè $x \in]0, +\infty[$.

Considerando la seconda disequazione $\frac{3}{1-x} > 0$, si ha che la frazione è positiva se e solo se $1-x > 0$ se e solo se $x < 1$, cioè $x \in]-\infty, 1[$.

La soluzione del sistema è l'insieme intersezione fra la soluzione della prima disequazione e la soluzione della seconda disequazione, cioè

$$x \in]0, +\infty[\cap]-\infty, 1[=]0, 1[$$

(vedi anche figura).



Esercizi su disequazioni con il valore assoluto6.1) Risolvere la disequazione $|x+9| > 2$

$$\text{Si ha: } |x+9| = \begin{cases} x+9 & \text{per } x+9 \geq 0, \text{ ossia } x \geq -9 \text{ I)} \\ -x-9 & \text{per } x+9 \leq 0, \text{ ossia } x \leq -9 \text{ II)} \end{cases}$$

Nel caso I), la nostra disequazione si scrive $x+9 > 2$, cioè $x > -7$. Dobbiamo tenere conto che $x \geq -9$ perché siamo nel caso I), ma se $x > -7$, allora è automaticamente $x \geq -9$ (che diventa superflua).

Pertanto il caso I) fornisce la soluzione $x > -7$.

Nel caso II), la nostra disequazione diventa $-x-9 > 2$, cioè $-x > 11$, ossia $x < -11$. Dobbiamo tenere conto che $x \leq -9$ perché siamo nel caso II), ma se $x < -11$, allora è automaticamente $x \leq -9$.

Pertanto il caso II) fornisce la soluzione $x < -11$.

Pertanto la soluzione della disequazione data è costituita dall'unione insiemistica degli insiemi soluzioni del caso I) e del caso II), cioè

$$x > -7 \text{ oppure } x < -11, \text{ ossia } x \in]-\infty, -11[\cup]-7, +\infty[.$$

Allo stesso risultato si arriva se si pone $t = x+9$, $k=2$ e si osserva che $|t| > k$ se e solo se $t > k$ oppure $t < -k$ (nel nostro caso, $x+9 > 2$ oppure $x+9 < -2$, cioè $x > -7$ oppure $x < -11$).



(N.B.: invece, $|t| < k$ se e solo se $-k < t < k$, con $k > 0$)

~~100~~

- 70 -

6.2) Risolvere la disequazione $|x+4| > |2x-5|$

Notiamo che $|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{per } x+4 \geq 0, \text{ cioè } x \geq -4 \\ -x-4 & \text{per } x+4 < 0, \text{ cioè } x < -4 \end{cases}$

$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5 & \text{per } 2x-5 \geq 0, \text{ cioè } x \geq \frac{5}{2} \\ 5-2x & \text{per } 2x-5 < 0, \text{ cioè } x < \frac{5}{2} \end{cases}$



Quindi, quando si considerano insieme i due valori assoluti, ci sono tre insiemi da studiare: $A =]-\infty, -4[$,

$B = [-4, \frac{5}{2}[$ $C = [\frac{5}{2}, +\infty[$ (i punti -4 e $\frac{5}{2}$ possono essere considerati indifferentemente in A o in B (in B o in C))

Nell'insieme A, si ha che $x < -4$ ed $x < \frac{5}{2}$, e quindi la nostra disequazione si scrive

$$-x-4 > 5-2x, \text{ cioè } 2x-x > 5+4, \text{ ossia } x > 9, \text{ che}$$

non fornisce soluzioni (perché siamo in A, e in A è $x < -4$)

Nell'insieme B, si ha che $x \geq -4$ ed $x < \frac{5}{2}$, e la

$$\text{disequazione è } x+4 > 5-2x, \text{ cioè } 3x > 1, \text{ ossia } x > \frac{1}{3}$$

~~Quindi la disequazione data, in B,~~ fornisce le soluzioni $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$, cioè

$x \in]\frac{1}{3}, \frac{5}{2}[$. Nell'insieme C, si ha $x \geq -4$ ed $x \geq \frac{5}{2}$, quindi la

disequazione è $x+4 > 2x-5$, cioè $2x-x < 4+5$, ossia $x < 9$, che

fornisce le soluzioni $x \in [\frac{5}{2}, 9[$ (visto che siamo in $C = [\frac{5}{2}, +\infty[$)

Quindi la soluzione globale è $x \in]\frac{1}{3}, \frac{5}{2}[\cup [\frac{5}{2}, 9[=]\frac{1}{3}, 9[$ cioè

$$\frac{1}{3} < x < 9.$$

ESERCIZI SUL CAMBIO DI BASE NEI LOGARITMI

7.1) Calcolare $\log_4 512$.

Notiamo che sia 4 sia 512 sono potenze di 2.

Più precisamente, si ha: $4 = 2^2$, $512 = 2^9$.

Quindi scegliamo la base 2. Applicando la formula del cambiamento di base, si ottiene

$$\log_4 512 = \frac{\log_2 512}{\log_2 4} = \frac{9}{2} \quad (\log_2 512 = 9 \text{ perché } 2^9 = 512, \log_2 4 = 2 \text{ perché } 2^2 = 4)$$

(N.B.: ricordiamo che, dove ha senso,
 $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$)

7.2) Calcolare $\log_{\frac{1}{4}} 128$.

Notiamo che $128 = 2^7$, ed inoltre $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$. Quindi

$\log_2 128 = 7$, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$. Applicando la formula del cambio di base (con $b=2$), si ha

$$\log_{\frac{1}{4}} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

7.3) Calcolare $\log_{27} 81$. Si ha: $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, e quindi $\log_3 27 = 3$, $\log_3 81 = 4$. Applicando la formula del cambio di base (con $b=3$), si ha

$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{4}{3}$$

79-

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni logaritmiche

(Esercizio). Risolvere le seguenti equazioni!

9.1. $5 \ln x = 0$ se e solo se $\ln x = 0$, cioè $\ln x = \ln 1$
Pertanto si ottiene $x = 1$

9.2. $\ln(2x) - 9 = 0$ si ha! $\ln(2x) = 9$ $\ln(2x) = e^9$
Passando all'esponenziale, si ottiene $2x = e^9$
La soluzione è quindi $x = \frac{e^9}{2}$

9.3. $3 \ln x + 9 = 0$ si ha! $\ln x + 3 = 0$, cioè $\ln x = -3$
e quindi $x = e^{-3}$.

9.4. $\ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right) = 0$. si ha $\ln t = 0$ se e solo se $t = 1$,

quindi l'equazione data è equivalente a $\frac{x-1}{x+4} = 1$, cioè
 $x-1 = x+4$ (purché $x \neq -4$), il che è impossibile
(si otterrebbe $-1 = 4$, che è assurdo).

9.5. $\frac{\ln x - 1}{\ln(x+4)} = 0$ Innanzi tutto, dev'essere $x > 0$,
altrimenti la quantità $\ln x$ non
avrebbe senso. Se $x > 0$, allora anche $x+4 > 0$, e allora,
visto che già $x > 0$, la disequazione $x+4 > 0$ non costituisce
una restrizione. Si deve avere anche: $\ln(x+4) \neq 0$ (il
denominatore non si deve annullare), cioè $\ln(x+4) \neq \ln 1$
il che è equivalente a dire $x+4 \neq 1$ cioè $x \neq -3$. Questa
condizione è già implicata da $x > 0$. Pertanto il membro
di sinistra ha senso se e solo se $x > 0$. Risolviamo ora
l'equazione. Si ha! $\ln x - 1 = 0$ se e solo se $\ln x = 1 =$
 $= \ln e$ se e solo se $x = e$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni logaritmiche

Esercizio 10: Risolvere le seguenti disequazioni:

10.1 $\log_{10} x \geq 10$ si ha, tenendo conto delle proprietà delle funzioni inverse: $x = \log_{10}(10^x) = 10^{\log_{10} x} \geq 10^{10}$

Quindi $x \geq 10^{10}$, cioè $x \in [10^{10}, +\infty[$

10.2 $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 1$ Innanzi tutto, dev' essere $x > 0$, altrimenti il logaritmo non sarebbe definito. Poiché la base è (positiva e) minore di 1, quando si passa all' esponenziale, bisogna cambiare il verso della disuguaglianza, ottenendo:

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$ Quindi, in definitiva, si ha: $0 < x \leq \frac{1}{3}$, cioè $x \in]0, \frac{1}{3}]$.

10.3 $\ln x - 7 < -1$ Innanzi tutto, si deve avere

$x > 0$. Inoltre, si ha anche $\ln x < 6$, da cui $x = e^{\ln x} < e^6$. In definitiva, la soluzione è: $0 < x < e^6$, cioè $x \in]0, e^6[$.

10.4 $\ln(x+3) - \ln(x^2-27) \geq 0$. Innanzi tutto, affinché abbia senso fare il logaritmo, dev' essere $x+3 > 0$, cioè $x > -3$, e anche $x^2-27 > 0$, cioè x dev' essere esterno all'intervallo delimitato dalle radici dell'equazione $x^2-27=0$, che sono $\sqrt{27}$ e $-\sqrt{27}$, quindi $x > \sqrt{27}$ oppure $x < -\sqrt{27}$. In sostanza x , a priori, deve appartenere all'insieme $A =]-3, +\infty[\cap (]-\infty, -\sqrt{27}[\cup]\sqrt{27}, +\infty[) =]\sqrt{27}, +\infty[$.

RisolviAMO la disequazione, si ha (purché $x \in A$):

$\ln(x+3) \geq \ln(x^2-27)$, e quindi $x+3 \geq x^2-27$, da cui $x^2-x-30 \leq 0$, cioè x dev' essere interno all'intervallo delimitato dalle radici $x_{1,2}$ dell'equazione $x^2-x-30=0$, si ha:

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \begin{matrix} 6 \\ -5 \end{matrix}$
 $x \in [-5, 6] \cap A = [-5, 6] \cap]\sqrt{27}, +\infty[=]\sqrt{27}, 6]$, cioè $\sqrt{27} < x \leq 6$.

~~74~~ DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle funzioni logaritmiche

Disequazioni:

10.5 $\ln(x^2) \leq 0$. Innanzi tutto, affinché il logaritmo abbia senso, si deve avere $x^2 > 0$, cioè $x \neq 0$. Risolviamo ora la disequazione. Si ha: $\ln(x^2) \leq \ln 1$, e quindi $x^2 \leq 1$, ossia $x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1) \leq 0$. Pertanto x è interno all'intervallo delimitato dalle radici -1 ed 1 , quindi, tenendo conto che dev'essere anche $x \neq 0$, si ottiene la soluzione $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$.

$$10.6 \frac{\ln(x+12)}{3x-6} \leq 0$$

Esaminiamo dapprima il numeratore. È definito per $x+12 > 0$, cioè $x > -12$, in quanto il logaritmo dev'essere ben definito. Si ha, per $x > -12$: $\ln(x+12) > 0$ se e solo se $\ln(x+12) > \ln 1$ se e solo se $x+12 > 1$ cioè $x > -11$. Analogamente, si vede che $\ln(x+12) = 0$ se e solo se $x = -11$ e che $\ln(x+12) < 0$ se e solo se $-12 < x < -11$.

Numeratore $\begin{array}{c} \neq \\ -12 \end{array} \quad \begin{array}{c} \neq \\ -11 \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ + \end{array}$

Consideriamo adesso il denominatore, $3x-6 = 3(x-2)$. È positivo per $x > 2$, si annulla per $x = 2$, è negativo per $x < 2$. Si ha:

| | | |
|-----------------|---|---------------------------------------|
| Numeratore | $\begin{array}{c} \neq \\ -12 \end{array} \quad \begin{array}{c} \neq \\ -11 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \end{array}$ | $\begin{array}{c} + \\ - \end{array}$ |
| Denominatore | $\begin{array}{c} - \\ -12 \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ -11 \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ + \end{array}$ | $\begin{array}{c} + \\ - \end{array}$ |
| FRAZIONE | $\begin{array}{c} \neq \\ -12 \end{array} \quad \begin{array}{c} \neq \\ -11 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \end{array}$ | $\begin{array}{c} + \\ - \end{array}$ |

L'insieme soluzione della disequazione data 10.6 è l'insieme costituito da (tutti e soli) i valori x che rendono la frazione negativa oppure nulla, cioè $x \in [-11, 2[$ (-11 compreso, 2 escluso), ossia $-11 \leq x < 2$.

Esercizio 10.7)

Risolvere la disequazione $5^{2x} - 5^{x+1} + 6 > 0$

È una disequazione di tipo "esponenziale", che si risolve anche con l'aiuto delle disequazioni di 2° grado.

TRUCCO: Poniamo $5^x = t$. Per le proprietà delle potenze, si ha: $5^{2x} = 5^{x \cdot 2} = (5^x)^2 = t^2$; $5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1 = 5 \cdot 5^x = 5t$.
La disequazione data si esprime come $t^2 - 5t + 6 > 0$.
Risolviamo l'equazione associata $t^2 - 5t + 6 = 0$. Si ha:

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Siccome $a = 1 > 0$ (ovvero a è il coefficiente di t^2), allora $t^2 - 5t + 6 > 0$ (che è la nostra disequazione) per valori ^{di t} esterni alle radici 2 e 3, cioè per $t > 3$ oppure (unione insiemistica) $t < 2$. Ma adesso ricordiamoci $t = 5^x$, e quindi si ottiene $5^x > 3$ oppure $5^x < 2$. Adesso, per ricavare x , "passiamo ai logaritmi": siccome $5 > 1$, le funzioni 5^x , $\log_5 x$ sono STRETTAMENTE CRESCENTI, e quindi le disuguaglianze non cambiano di segno (sarebbero cambiate se la base fosse stata compresa fra 0 e 1 perché in tal caso le funzioni esponenziale e logaritmo sarebbero state strettamente decrescenti). Quindi da $5^x > 3$ si ricava $x = \log_5(5^x) > \log_5 3$, e analogamente da $5^x < 2$ si deduce $x < \log_5 2$: quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è uguale all'unione insiemistica degli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni. Pertanto la soluzione della disequazione data è $x > \log_5 3$ oppure $x < \log_5 2$, cioè $x \in]\log_5 3, +\infty[\cup]-\infty, \log_5 2[$

Esercizio 10.8)

Risolvere la disequazione $\log_2(x^2 - 10x + 25) \leq 2 \cdot \log_2 3$

Innanzitutto, osserviamo che L'ARGOMENTO DEL LOGARITMO DEVE ESSERE POSITIVO. Ciò equivale a risolvere la disequazione $x^2 - 10x + 25 > 0$.

Studiamo dapprima l'equazione associata $x^2 - 10x + 25 = 0$ si ha: $a=1, b=-10, c=25$ e quindi $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$. Quindi l'equazione ammette l'unica soluzione $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{2} = 5$, e pertanto è $x^2 - 10x + 25 > 0$ per tutti gli x reali tranne $x=5$, cioè per $x \neq 5$.

Quindi il punto $x=5$ va escluso a priori.

Adesso passiamo alla disequazione vera e propria. Innanzitutto osserviamo che, per le proprietà dei logaritmi, si ha

$$2 \cdot \log_2 3 = \log_2(3^2) = \log_2 9, \text{ quindi la disequazione è } \log_2(x^2 - 10x + 25) \leq \log_2 9$$

A questo punto si può "eliminare" il logaritmo (cioè, passare all'esponenziale) tenendo conto che le disuguaglianze non cambiano di segno, in quanto la base è $2 > 1$ e quindi le funzioni $2^x, \log_2 x$ sono strettamente crescenti. Si ottiene

$$2 \log_2(x^2 - 10x + 25) \leq 2 \log_2 9$$

cioè (v. anche testo adottato, pag. 95)

$$\boxed{x^2 - 10x + 25} = 2 \log_2(x^2 - 10x + 25) \leq 2 \log_2 9 = \boxed{9} \text{ ma}$$

$x^2 - 10x + 25 \leq 9$ cioè $\boxed{x^2 - 10x + 16 \leq 0}$. Studiamo l'equazione associata $x^2 - 10x + 16 = 0$. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{matrix} \rightarrow 8 \\ \rightarrow 2 \end{matrix}$$

Questa disequazione è soddisfatta per valori interni a $[2, 8]$ (estremi inclusi perché c'è il \leq); ma bisogna escludere il valore $x=5$ perché in $x=5$ non è definito il logaritmo del 1° membro. Quindi LA SOLUZIONE È $x \in [2, 8]$ ed $x \neq 5$, cioè $x \in [2, 5[\cup]5, 8]$.